

POLARISATION DER KOHÄRENTEN BREMSSTRAHLUNG
VON EXTREMRELATIVISTISCHEN POLARISIERTEN
ELEKTRONEN

BERTHOLD NEUMCKE

MÜNCHEN

1967

Polarisation der kohärenten Bremsstrahlung
von extremrelativistischen polarisierten
Elektronen

Inaugural-Dissertation zur
Erlangung der Doktorwürde der Naturwissen-
schaftlichen Fakultät der Ludwig-Maximilians-
Universität München

vorgelegt von
Berthold Neumcke

München, im Februar 1967

1. Referent: Dr. H.J. Meister

2. Referent: Prof. Dr. F. Bopp

Tag der mündlichen Prüfung: 31.5.1967

Herrn Prof. Dr. F. Bopp bin ich für sein Interesse an dieser Arbeit verbunden. Herrn Dr. H.J. Meister danke ich für viele wertvolle Diskussionen und kritische Bemerkungen und Herrn Dr. U. Timm für Auskünfte über Experimente mit kohärenter Bremsstrahlung am Deutschen Elektronensynchrotron in Hamburg. Dank schulde ich auch der Deutschen Forschungsgemeinschaft, die diese Arbeit unterstützt hat und dem Rechenzentrum der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, an dem die numerische Auswertung vorgenommen wurde.



Z u s a m m e n f a s s u n g

Lenkt man unpolarisierte extremrelativistische Elektronen auf einen Kristall, so weist das Spektrum der entstehenden kohärenten Bremsstrahlung bei bestimmten Energien hohe Intensitätsspitzen auf, und die Bremsstrahlung in diesen Spitzen ist auch nach der Mittelung über die Endimpulse transversal polarisiert. Wir haben die kohärente Bremsstrahlung für polarisierte extremrelativistische Elektronen berechnet. Damit erhält die Bremsstrahlung von longitudinal polarisierten Elektronen sowohl in einem amorphen Target als auch in einem Kristall dieselbe, zu höheren Photonenenergien bis auf 100% ansteigende, zirkuläre Polarisation. Bei Verwendung eines Kristalls können also besonders intensive hochenergetische zirkular polarisierte γ - Strahlen gewonnen werden. Keine zusätzliche zirkuläre Photonpolarisation tritt dagegen bei transversal polarisierten Elektronen auf. Schließlich wird eine Möglichkeit diskutiert, den Polarisationsgrad longitudinal polarisierter extremrelativistischer Elektronen über die kohärente Bremsstrahlung zu messen. Da die Bestimmung dieser Polarisation bei direkten Streuprozessen auf Schwierigkeiten stößt, scheint es günstiger zu sein, die longitudinale Elektronenpolarisation auf eine Zirkularpolarisation der Bremsstrahlung zu übertragen, diese durch einen Kristall in eine transversale Photonpolarisation umzuwandeln und dann Asymmetriemessungen bei der Paarerzeugung durchzuführen.

Inhaltsverzeichnis

	Seite
Einleitung	5
1 Bremsstrahlung im Feld eines einzelnen Atoms	10
1.1 Polarisationsbeschreibung von Elektronen und Photonen	10
1.2 Allgemeine Struktur der Polarisationskoeffizienten	14
1.3 Berechnung der Koeffizienten in niedrigster Bornscher Näherung	18
1.4 Mittelung über die Richtung der Endimpulse	22
2. Bremsstrahlung im Kristall	28
2.1 Übergang vom Einzelprozeß zum Kristall	28
2.2 Allgemeines zur Mittelung bei einem Kristall	31
2.3 Mittelung der transversalen Photonpolarisation	34
2.4 Mittelung der zirkularen Photonpolarisation	36
3. Auswertung und Ergebnisse	38
3.1 Der Diamantkristall	38
3.2 Diskussion einer speziellen Kristallorientierung	39
3.3 Ergebnisse	41
3.4 Messung der longitudinalen Polarisation extremrelativistischer Elektronen über die kohärente Bremsstrahlung	45
Anhang A: Behandlung einer allgemeineren Kristallorientierung	52
Anhang B: Umrechnung von $\cos \chi, \sin \chi$ als Funktion von ϑ	54
Bezeichnungen	56
Literaturverzeichnis	57

Einleitung

Die an den Hochenergiezentren für Photoerzeugungs-Experimente benötigten γ -Strahlen werden heute hauptsächlich durch Abbremsung extremrelativistischer unpolarisierter Elektronen gewonnen. Lenkt man die Elektronen dabei auf ein amorphes Target, so sind im Bremsstrahlungsspektrum alle Energien bis zur primären Elektronenenergie mit annähernd gleicher Intensität vertreten. Das ist nun für die Experimente von großem Nachteil. Denn da bei Energien im GeV-Gebiet für Photonen keine Energiefilter mehr bekannt sind, kann die Energie der an dem Prozeß beteiligten γ -Quanten nur rückwärts aus einer Impulsanalyse der Reaktionsprodukte ermittelt werden. Erwünscht wäre daher ein Bremsstrahlungsspektrum, in dem eine oder nur wenige Energien mit hoher Intensität vertreten sind. Außerdem wäre es sehr vorteilhaft, wenn die γ -Strahlung polarisiert ist. Denn mit polarisierten Teilchen lassen sich viel detailliertere Aussagen über die Wechselwirkung gewinnen und daher spezielle Modellvorstellungen testen.¹¹⁾¹²⁾ Es läßt sich nun nicht erreichen, daß die bei der Abbremsung extremrelativistischer unpolarisierter Elektronen in einem amorphen Target ausgelöste Bremsstrahlung eine bestimmte Polarisation aufweist. Zwar ist in bestimmten Raumwinkelementen die Bremsstrahlung transversal polarisiert. Da aber bei extremrelativistischen Energien die Photonen in einem sehr schmalen Kegel um die Richtung der primären Elektronen konzentriert sind, lassen sich einzelne Raumwinkelemente dieses Kegels nur schwer ausblenden. Mittelt man aber über die Richtung der Endimpulse, so ist

die gesamte Bremsstrahlung unpolarisiert.

Die erwähnten Nachteile lassen sich zum größten Teil beseitigen, wenn man statt eines amorphen Targets einen Einkristall verwendet. Denn dann besitzt das Bremsstrahlungsspektrum bei bestimmten Energien hohe Intensitätsspitzen, und die Bremsstrahlung in diesen Spitzen ist auch nach der Mittelung über die Richtung der Endimpulse noch transversal polarisiert. Die theoretischen Untersuchungen über die Bremsstrahlung von unpolarisierten extremrelativistischen Elektronen im Kristall, zuerst von Überall¹⁾²⁾³⁾, dann von Diambrini und Mitarbeitern⁴⁻⁷⁾, sind sehr umfangreich und unanschaulich. Die wesentlichen Effekte lassen sich aber auch bereits ohne Rechnung verstehen.²⁵⁾ Die einfallenden Elektronen, als ebene Welle idealisiert, sollen parallel zu einer Schar periodisch angeordneter Gitteratome laufen und an jeder Gitterreihe jeweils ein Bremsstrahlquant auslösen. Da die extremrelativistischen Elektronen praktisch Lichtgeschwindigkeit besitzen, können sie mit ihrer eigenen Strahlung Schritt halten, so daß sich die an den einzelnen Gitteratomen ausgelöste Bremsstrahlung kohärent überlagert. Das führt dann dazu, daß im Bremsstrahlungsspektrum bestimmte Energien bevorzugt vertreten sind. Auch läßt sich verstehen, daß die so entstandene kohärente Bremsstrahlung selbst nach der Mittelung über die Richtung der Endimpulse transversal polarisiert ist. Denn im Kristall sind Vorzugsrichtungen definiert, so daß bezüglich dieser Richtungen auch nach der Mittelung noch eine transversale Photonpolarisation übrigbleibt. Diese interessanten Eigenschaften der kohärenten Bremsstrahlung wurden bereits experimentell nachgeprüft und bestätigt, und zwar zuerst am Elektronensynchrotron in Frascati⁴⁻⁷⁾ und inzwischen auch am DESY in Hamburg.⁸⁾⁹⁾¹⁰⁾ Man kann also jetzt auf diese Weise transversal polari-

sierte γ -Strahlen im GeV-Gebiet von hoher Intensität herstellen.

Die bisherigen Untersuchungen über die kohärente Bremsstrahlung waren auf unpolarisierte Elektronen beschränkt. Da man in absehbarer Zukunft auch polarisierte extrem-relativistische Elektronen zur Verfügung haben wird, ist es von Interesse, die Bremsstrahlung im Kristall auch für polarisierte Elektronen zu betrachten. Solche Elektronen liefern im amorphen Target eine zirkular polarisierte Bremsstrahlung. Daher ist zu erwarten, daß beim Durchgang von polarisierten Elektronen durch einen Kristall die kohärente Bremsstrahlung neben einer transversalen auch eine zirkuläre Komponente erhält. Es ist das Ziel dieser Arbeit, diese Effekte genauer zu untersuchen und zu diskutieren.

Dazu wird zunächst im 1. Kapitel der Wirkungsquerschnitt und die Polarisation der Bremsstrahlung polarisierter Elektronen im Feld eines einzelnen Atoms in niedrigster Bornscher Näherung berechnet. Zur Beschreibung der Polarisation von Photonen benutzen wir den kovarianten Formalismus, den wir in der Diplomarbeit¹³⁾ entwickelt haben. Alle Polarisationskoeffizienten haben wir damit Neuberechnet und in einigen Fällen Fehler bei anderen Autoren¹⁸⁾ aufgefunden. Auch lassen sich aus allgemeinen Invarianzeigenschaften Folgerungen über die Struktur der Polarisationskoeffizienten ziehen, die mit unseren Ergebnissen stets im Einklang sind und¹⁸⁾ widersprechen. Zum Abschluß des 1. Kapitels werden die Mittelwerte bei fester Energie über die zu verschiedenen Impulsrichtungen gehörigen Polarisierungen bei einem amorphen Target berechnet. Ein solcher Ausdruck ist überhaupt nur dann eine sinnvolle Größe, wenn die zu mittelnden Teilchen räumlich nur wenig streuen, so daß die Impulse in guter Näherung auf eine gemeinsame Richtung bezogen

werden können. Im Fall der Bremsstrahlung extremrelativistischer Elektronen ist diese Voraussetzung erfüllt, weil dann alle Teilchen um die Vorwärtsrichtung konzentriert sind. Stellt man in dieser Richtung einen Polarisationsmeßapparat mit einer endlichen Öffnung auf, so wird jeder Teilstrahl mit einem zum differentiellen Wirkungsquerschnitt proportionalen Gewichtungsfaktor zum Polarisationsmittelwert beitragen. Auf diese Weise wird der Mittelwert der zirkularen Photonpolarisation von longitudinal polarisierten Elektronen berechnet und diskutiert.

Im 2. Kapitel werden die Ergebnisse auf den Kristall erweitert, indem das Potential eines einzelnen Atoms durch das periodische Gitterpotential ersetzt wird. Mit diesem Ansatz vernachlässigen wir wie in der geometrischen Gittertheorie der Röntgenstrahlinterferenzen alle Rückwirkungen der Gitteratome untereinander sowie Sekundärprozesse aller Art. Bei extremrelativistischen Elektronenergien und in niedrigster Bornscher Näherung sind diese Effekte aber sicher zu vernachlässigen. Die auf diese einfache Weise erhaltenen differentiellen Polarisationskoeffizienten müssen dann wieder über die Winkel des auslaufenden Elektrons und Photons gemittelt werden, um für den Experimentator brauchbare Aussagen zu erhalten. Diese Integration wird für alle bei der kohärenten Bremsstrahlung auftretenden Photonpolarisationen durchgeführt.

Durch die Temperaturbewegung werden die uns interessierenden Kristalleffekte abgeschwächt. Man könnte diesen störenden Einfluß durch Abkühlung des Kristalls verringern, doch läßt sich dieser experimentelle Aufwand vermeiden, indem man einen Kristall mit einer hohen Debye-Temperatur auswählt. Denn auch dadurch läßt sich die Temperaturbewegung heruntersetzen. Diamant hat nun

die mit Abstand größte Debye-Temperatur (1860°K). Da man heute auch Diamant-Einkristalle von ausreichender Größe herstellen kann, werden diese jetzt hauptsächlich als Target zur Erzeugung kohärenter Bremsstrahlung verwendet. Daher haben wir uns auch bei der numerischen Auswertung im 3. Kapitel auf den Diamant spezialisiert. Die angegebenen Kurven lassen erkennen, daß man bei longitudinal polarisierten Elektronen von einem Einkristall dieselbe Zirkularpolarisation der Bremsstrahlung erhält wie von einem amorphen Target. In beiden Fällen steigt der Polarisationsgrad bei höheren Photonenenergien bis auf 100% an. Bei der Abbremsung extremrelativistischer longitudinal polarisierter Elektronen in einem Kristall ist daher die Polarisation der kohärenten Bremsstrahlung in der ersten Intensitätskante wie bei unpolarisierten Elektronen vorwiegend transversal, während man für die folgenden Kanten eine hohe vorwiegend zirkulare Polarisation erhält. Der Experimentator kann daher die Verhältnisse weitgehend den jeweiligen Erfordernissen anpassen. Außerdem ergibt sich eine verbesserte Möglichkeit, die longitudinale Polarisation extremrelativistischer Elektronen zu bestimmen, indem man diese Polarisation über die kohärente Bremsstrahlung auf eine zirkulare Photonpolarisation überträgt. Diese Polarisation ist dann mit ausreichender Genauigkeit durch Asymmetrieeffekte bei anderen Prozessen meßbar.

Da alle von uns berechneten Ausdrücke die Ladung quadratisch enthalten, lassen sich sämtliche Ergebnisse dieser Arbeit für die Bremsstrahlung von Positronen übernehmen.

1. Bremsstrahlung im Feld eines einzelnen Atoms

Dieses Kapitel enthält alle diejenigen Tatsachen über die Bremsstrahlung eines Elektrons im Feld eines einzelnen Atoms, die wir dann bei der Erweiterung auf den Kristall brauchen werden. Nach der Erläuterung unserer Bezeichnungen in 1.1 werden in 1.2 die allgemeine Struktur der Polarisationskoeffizienten untersucht und Folgerungen aus Invarianzeigenschaften diskutiert. Die Berechnung aller Koeffizienten in niedrigster Bornscher Näherung findet man in 1.3. In 1.4 werden dann die Mittelung über die Richtung der Endimpulse durchgeführt und die kinematischen Nebenbedingungen für den Kernrückstoß diskutiert.

1.1 Polarisationsbeschreibung von Elektronen und Photonen

Wir betrachten die Bremsstrahlung in einem elektromagnetischen Feld, wobei die Fouriertransformierte von dessen Potential mit $A^\alpha(q^\mu)^{+)}$ bezeichnet wird. Der während des Prozesses übertragene Impuls q^μ ist dabei mit den Elektronimpulsen p^μ, p'^μ im Anfangs- und Endzustand sowie mit dem Impuls k^μ des Bremsstrahlquants verknüpft durch:

$$(1.1) \quad p^\mu = q^\mu + p'^\mu + k^\mu$$

⁺) Bezeichnungen siehe S. 56

Bei einem statischen Potential ist $q^0 = 0$, so daß für die am Prozeß beteiligten Teilchen der Energieerhaltungssatz gilt:

$$(1.2) \quad p^0 = p'^0 + k'^0$$

Die Winkel zwischen Photonimpuls und Elektronanfangsimpuls bzw. Elektronendimpuls seien $\tilde{\nu}$ bzw. $\tilde{\nu}'$, und mit ϕ wird der Winkel zwischen den Ebenen $(\vec{p}, \vec{k}')$ und $(\vec{p}', \vec{k}')$ bezeichnet.

Für die Beschreibung der Polarisierung von Elektronen benutzen wir den kovarianten Formalismus aus¹⁵⁾: Der Projektor, der die Lösungen $u(p)$ der Diracgleichung im Impulsraum

$$(1.3) \quad (\hat{p} + 1) u(p) = 0$$

aus einem beliebigen Spinor herausprojiziert, lautet:

$$(1.4) \quad P(p) = \frac{1}{2} (-\hat{p} + 1)$$

Wegen $\text{Sp}[P(p)] = 2$ spannen seine Eigenvektoren einen zweidimensionalen Vektorraum, den sog. Polarisationsraum auf. Der Projektor auf dessen Basisvektoren $u_\eta(t, p)$ mit $\eta = \pm 1$ ist:

$$(1.5) \quad P_\eta(t, p) = \frac{1}{2} (1 + \eta \gamma^5 \hat{t}(p)) P(p)$$

Dabei ist $\hat{t}^\mu(p)$ ein raumartiger Einheitsvektor orthogonal zu p^μ . Wenn kein reiner Fall vorliegt, sondern ein Gemisch, in dem die Amplitude $u_\eta(t, p)$ mit der Wahrscheinlichkeit γ_η vertreten ist, so tritt an die Stelle des Projektors (1.5) der statistische Operator:

$$(1.6) \quad \begin{aligned} \mathcal{S}(\zeta, p) &= \tau_{+1} P_{+1}(t, p) + \tau_{-1} P_{-1}(t, p) \\ &= \frac{1}{2} (1 + \gamma^5 \zeta_{(4)} \hat{t}^{(4)}) P(p) \end{aligned}$$

Darin sind $\zeta^{(i)}$ die Komponenten des Polarisationsvektors

$$(1.7) \quad \zeta^\mu = (\tau_{+1} - \tau_{-1}) t^\mu$$

bezüglich eines orthogonalen Dreibeins $t^{(i)\mu}$ aus raumartigen Vierervektoren, das man zweckmäßigerweise wählt zu:

$$(1.8) \quad \begin{aligned} t^{(1)} &= (|\vec{p}|, \frac{p^0}{|\vec{p}|} \vec{p}) \\ t^{(2)} &= (0, \vec{t}^{(2)}) ; \quad \vec{t}^{(2)} = \vec{t}^{(3)} \times \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|} \\ t^{(3)} &= (0, \vec{t}^{(3)}) ; \quad \vec{t}^{(3)} = \frac{\vec{p} \times \vec{k}'}{|\vec{p} \times \vec{k}'|} \end{aligned}$$

Dabei ist $t^{(1)}$ einer longitudinalen Elektronpolarisation zugeordnet und $t^{(2)}$ bzw. $t^{(3)}$ einer Transversalpolarisation in bzw. senkrecht zu der Ebene $(\vec{p}, \vec{k}')$.

Die kovariante Beschreibung der Polarisation von Photonen haben wir in ¹³⁾¹⁴⁾ entwickelt, und wir wollen deshalb hier nur kurz die Ergebnisse referieren.^{+) Die Photonpolarisation wird auf zwei Einheitsvektoren $h^{(2)}$, $h^{(3)}$ bezogen, die das Analogon zu den Bezugsvektoren $t^{(i)}$ bei der Elektronpolarisation sind. Sie werden so orientiert, daß deren Raumanteile zusammen mit $\vec{k}'$ ein orthogonales Rechtssystem bilden. Bei der Bremsstrahlung kann dafür gewählt werden:}

$$(1.9) \quad \begin{aligned} h^{(2)} &= (0, \vec{h}^{(2)}) ; \quad \vec{h}^{(2)} = \vec{h}^{(3)} \times \frac{\vec{k}'}{|\vec{k}'|} \\ h^{(3)} &= (0, \vec{h}^{(3)}) ; \quad \vec{h}^{(3)} = \frac{\vec{p} \times \vec{k}'}{|\vec{p} \times \vec{k}'|} \end{aligned}$$

Damit lautet der Projektor auf den zweidimensionalen Polarisationsraum des Photons:

$$(1.10) \quad P(k) = h^{(2)}(k) h^{(2)}(k) + h^{(3)}(k) h^{(3)}(k)$$

Dieser Operator und alle folgenden im Photonraum sind 4 x 4 - Matrizen, d.h. ausführlich geschrieben gilt:

$$(1.11) \quad P^{\alpha\beta} = h^{(2)\alpha} h^{(2)\beta} + h^{(3)\alpha} h^{(3)\beta}$$

^{+) Man beachte, daß wir in ¹⁴⁾ eine andere Numerierung der Stokesschen Parameter benutzt haben.}

Für den Projektor auf die Amplitude mit einer bestimmten elliptischen Polarisationsrichtung $e_L(k')$ ($L = \pm 1$) ergibt sich:

$$(1.12) \quad P_L(k') = \frac{1}{2} (1 + L s'^{\frac{1}{2}} T'_j(k')) P_L(k')$$

Dabei sind die Operatoren T'_j definiert durch:

$$(1.13) \quad \begin{aligned} T'_1 &= i (h^{(3)} h^{(2)} - h^{(2)} h^{(3)}) \\ T'_2 &= h^{(2)} h^{(2)} - h^{(3)} h^{(3)} \\ T'_3 &= h^{(2)} h^{(3)} + h^{(3)} h^{(2)} \end{aligned}$$

Die Größen $s'^{\frac{1}{2}}$ mit

$$(1.14) \quad -1 \leq s'^{\frac{1}{2}} \leq 1 \quad ; \quad \sum_j (s'^{\frac{1}{2}})^2 = 1$$

sind die sog. Stokesschen Parameter. Diese haben folgende anschauliche Bedeutung: $s'^1 = \pm 1$ beschreibt eine rechts- bzw. linkszirkuläre Polarisation, $s'^2 = \pm 1$ eine transversale Polarisation in bzw. senkrecht zu der von $\vec{p}$ und $\vec{k}'$ aufgespannten Ebene und $s'^3 = \pm 1$ transversale Polarisationen, die gegen diese Ebene bzw. den Vektor $\vec{p} \times \vec{k}'$ um den Winkel $\frac{\pi}{4}$ geneigt sind.

Der Projektor (1.12) ist der statistische Operator eines reinen Falles. Liegt ein Gemisch vor, das die Amplitude e_L mit der Wahrscheinlichkeit w_L enthält, so erhält man die Dichtematrix

$$(1.15) \quad \mathcal{G}(\xi', k') = w_1 P_1(k') + w_{-1} P_{-1}(k') = \frac{1}{2} (1 + \xi'^{\frac{1}{2}} T'_j) P_L(k')$$

mit

$$(1.16) \quad \xi'^{\frac{1}{2}} = (w_1 - w_{-1}) s'^{\frac{1}{2}} ; \quad -1 \leq \xi'^{\frac{1}{2}} \leq 1 \quad ; \quad \sum_j (\xi'^{\frac{1}{2}})^2 \leq 1$$

Wenn umgekehrt die Dichtematrix $\mathcal{G}(\xi', k')$ gegeben ist, so lassen sich daraus die Stokesschen Parameter $\xi'^{\frac{1}{2}}$ des Gemisches berechnen gemäß

$$(1.17) \quad \xi'^{\frac{1}{2}} = \text{Sp} [T'^{\frac{1}{2}} \mathcal{G}]$$

der Polarisationsgrad ist dann $\sqrt{\xi'^{\frac{1}{2}} \xi'^{\frac{1}{2}}}$.

1.2 Allgemeine Struktur der Polarisationskoeffizienten

Zur Bestimmung der Polarisation der Bremsstrahlung ist nach (1.17) die Kenntnis des Dichteoperators im Raum der Endteilchenamplituden erforderlich. Diese Matrix erhält man auf folgende Weise: $\langle f | S | i \rangle$ sei das Streumatrixelement für die Bremsstrahlung eines Elektrons im äußeren stationären Feld $A(q^\mu)$.

Das durch

$$(1.18) \quad \langle f | S | i \rangle = \delta_{fi} + \delta(p^0 - p'^0 - k^0) \langle f | M | i \rangle$$

definierte Element der M-Matrix lautet dann ausführlich geschrieben:

$$(1.19) \quad \langle f | M | i \rangle = \overline{u_\eta(t', p')} e_\nu^+(k) M A(q^\mu) u_\eta(t, p)$$

Dabei ist M eine 16×16 - Matrix im Elektron-Photonraum. Durch Mittelung über die Endpolarisationen folgt dann für die i.a. nicht normierte Dichtematrix:

$$(1.20) \quad S(p', k) = P(p') P(k) M S(p) R(q^\mu) M^{ad} P(k) P(p')$$

Mit M^{ad} wurde die zu M adjungierte Matrix bezeichnet, und $R(q^\mu)$ ist eine Abkürzung für die 4×4 - Matrix im Photonraum:

$$(1.21) \quad R(q^\mu) = A(q^\mu) A^+(q^\mu)$$

Wir werden im folgenden nur statische elektrische Felder betrachten, bei denen die Fouriertransformierte des Potentials $V(\vec{r})$

$$(1.22) \quad V(\vec{q}) = \int V(\vec{r}) e^{i\vec{q}\vec{r}} d\vec{r}$$

nur vom Betrag $q = |\vec{q}|$ der Impulsübertragung abhängt und daher reell ist. Dann lautet R ausführlich geschrieben:

$$(1.23) \quad R(q)^{\alpha\beta} = V(q)^2 \delta_0^\alpha \delta_0^\beta$$

Die Dichtematrix $\mathcal{G}$ ist mit dem differentiellen Wirkungsquerschnitt verknüpft durch

$$(1.24) \quad \frac{d\mathcal{G}}{d\Omega'} = L \operatorname{Sp} [\mathcal{G}(p', k')]$$

wobei L ein nur aus Energien aufgebauter kinematischer Faktor ist und Sp die Spur im 16-dimensionalen Elektron-Photon-Raum bedeutet. Einsetzen von (120) ergibt:

$$(1.25) \quad \frac{d\mathcal{G}}{d\Omega'} = L (a + A^{(i)} \xi_{ii})$$

$$\text{mit: } a = \frac{1}{2} \operatorname{Sp} [P(p') P(k') M P(p) R(q) M^{ad}]$$

$$A^{(i)} = \frac{1}{2} \operatorname{Sp} [P(p') P(k') M \gamma^5 \hat{t}^{(i)} P(p) R(q) M^{ad}]$$

Die Stokesschen Parameter der Bremsstrahlung lassen sich nach (1.17) berechnen aus:

$$(1.26) \quad \xi^{ij} = \frac{\operatorname{Sp} [T^{ij}(k') \mathcal{G}(p', k')]}{\operatorname{Sp} [\mathcal{G}(p', k')]}$$

Die Aufspaltung nach den Elektronanfangspolarisationen ergibt:

$$(1.27) \quad \xi^{ij} = \frac{1}{\operatorname{Sp} [\mathcal{G}(p', k')]} \cdot [b^{ij} + B^{ij(i)} \xi_{ii}]$$

$$\text{mit: } b^{ij} = \frac{1}{2} \operatorname{Sp} [T^{ij}(k') P(p') M P(p) R(q) M^{ad}]$$

$$B^{ij(i)} = \frac{1}{2} \operatorname{Sp} [T^{ij}(k') P(p') M \gamma^5 \hat{t}^{(i)} P(p) R(q) M^{ad}]$$

Die angeschriebenen insgesamt 16 Koeffizienten für den Wirkungsquerschnitt und die Polarisierung der Bremsstrahlung brauchen aber in niedrigster Bornscher Näherung nicht alle berechnet zu werden, weil dann das Verschwinden einiger bereits auf Grund allgemeiner Invarianzeigenschaften erkennbar ist. Wenn z.B. ein Prozeß mit unpolarisierten Anfangsteilchen gegenüber einer bestimmten Transformation invariant ist, die Polarisierungen der Endteilchen aber dabei das Vorzeichen wechseln, so läßt sich sofort folgern, daß die entsprechenden Pola-

risationskoeffizienten verschwinden. Wesentlich bei diesen Betrachtungen ist also das Transformationsverhalten der Teilchenpolarisationen. Das uns hauptsächlich interessierende Transformationsgesetz der Stokesschen Parameter gegenüber den diskreten Lorentztransformationen lautet¹³⁾:

(1.28)

	P	PT
$\xi^{11} \rightarrow$	$-\xi^{11}$	$-\xi^{11}$
$\xi^{12} \rightarrow$	$+\xi^{12}$	$+\xi^{12}$
$\xi^{13} \rightarrow$	$-\xi^{13}$	$+\xi^{13}$

Bei einer Drehung der in (1.9) definierten Basis $h^{(i)}$ um den Winkel γ :

$$(1.29) \quad h^{(2)*} = \cos \gamma h^{(2)} + \sin \gamma h^{(3)}; \quad h^{(3)*} = -\sin \gamma h^{(2)} + \cos \gamma h^{(3)}$$

transformieren sich wegen (1.17) die Stokesschen Parameter wie die in (1.13) definierten Größen T'^i . Man erhält:

$$(1.30) \quad \begin{aligned} \xi^{11*} &= \xi^{11} \\ \xi^{12*} &= \cos 2\gamma \xi^{12} + \sin 2\gamma \xi^{13} \\ \xi^{13*} &= -\sin 2\gamma \xi^{12} + \cos 2\gamma \xi^{13} \end{aligned}$$

Wie zu erwarten wird die zirkulare Polarisation ξ^{11} durch eine Basisdrehung nicht verändert, während sich die transversalen Polarisationen mit dem doppelten Drehwinkel transformieren.

In der folgenden Tabelle ist angegeben, welche Koeffizienten unter bestimmten Voraussetzungen noch berechnet werden müssen¹⁶⁾:

(1.31)

Invarianz gegen $\rightarrow$	PT, H	PT, H PD_{π}	PT, H Rot
$\frac{d\mathcal{E}}{d\Omega'} =$	$L \cdot a$	$L \cdot a$	$L \cdot a$
$\xi^{11} =$	$\frac{B^{1(1)} \mathcal{J}_{1(1)}}{a}$	$\frac{B^{1(1)} \mathcal{J}_{1(1)} + B^{1(2)} \mathcal{J}_{1(2)}}{a}$	$\frac{B^{1(1)} \mathcal{J}_{1(1)}}{a}$
$\xi^{12} =$	$\frac{b^2}{a}$	$\frac{b^2}{a}$	σ
$\xi^{13} =$	$\frac{b^3}{a}$	σ	σ

In der 1. Spalte wird die PT-Invarianz der elektromagnetischen Wechselwirkung und die Hermitezität oder Schiefhermitezität der Streumatrix vorausgesetzt. Während die PT-Invarianz allgemein gilt, ist die Hermitezität oder Antihermitezität nur in 1. Bornscher Näherung erfüllt. Der Wirkungsquerschnitt hängt also dann von einer Polarisation der Elektronen nicht ab, und zu der ohne Elektronpolarisation allein vorhandenen transversalen Photonpolarisation ξ^{12}, ξ^{13} tritt zusätzlich noch eine zirkuläre Polarisation ξ^{11} auf Grund der primären Elektronpolarisation.

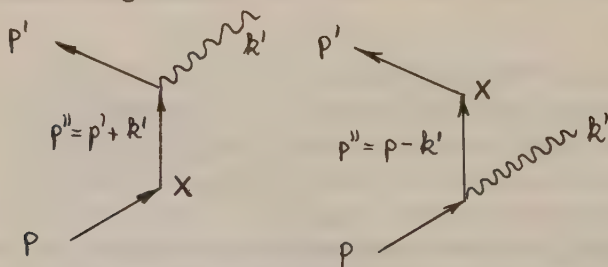
Findet der Bremsstrahlprozeß speziell in einer Ebene statt, so ist er invariant gegenüber einer Rauminversion P mit anschließender Drehung D_{π} um den Winkel π um eine Achse senkrecht zu dieser Ebene. Dann gelten in 1. Bornscher Näherung die in der 2. Spalte angeschriebenen Beziehungen. Eine transversale Photonpolarisation ist also nur in oder senkrecht zu dieser ausgezeichneten Ebene möglich, und eine transversale Elektronpolarisation liefert nur dann eine Zirkularpolarisation, wenn

sie in dieser Ebene liegt. Der Index 2 der Polarisationskoeffizienten bezieht sich dabei gemäß den Definitionen (1.8), (1.9) auf Polarisationsvektoren in der von den Vektoren $\vec{p}, \vec{k}'$ aufgespannten Ebene. Ist der Vorgang invariant gegenüber einer Transformation PD_π , wobei die Drehung in einer anderen Ebene auszuführen ist, so bezieht sich der Index 2 natürlich auf diese neue Ebene, und alle Aussagen der 2. Spalte bleiben bestehen. Dieser Fall wird uns im Abschnitt 2.2 begegnen.

In der 3. Spalte sind die Verhältnisse für den Fall angegeben, daß der Prozeß um die Richtung $\vec{p}$ rotations-symmetrisch ist, z.B. wenn alle Impulse $\vec{p}, \vec{p}', \vec{k}'$ auf einer Geraden liegen. In 1. Bornscher Näherung bleibt also nur noch eine Zirkularpolarisation der Bremsstrahlung von longitudinal polarisierten Elektronen übrig.

1.3 Berechnung der Koeffizienten in niedrigster Bornscher Näherung

In niedrigster Bornscher Näherung liefern die beiden Feynman-Diagramme:



folgenden Ausdruck für $M^{\alpha\beta}$:

$$\begin{aligned}
 M^{\alpha\beta} &= C \left\{ \gamma^\alpha \frac{\hat{p}' + \hat{k}' + i}{p' \cdot k'} \gamma^\beta - \gamma^\beta \frac{\hat{p} - \hat{k}' + i}{p \cdot k'} \gamma^\alpha \right\} \\
 (1.32) \quad &= - (M^{ad})^{\alpha\beta}
 \end{aligned}$$

wobei C ein reeller kinematischer Faktor ist. Die Streumatrix ist daher schiefhermitesch und die im vorigen Abschnitt für M aufgestellte Bedingung erfüllt.

Mit den Ausdrücken (1.4) und (1.10) für die Impulsprojektoren von Elektron und Photon läßt sich die Spur für den Koeffizienten a ohne weiteres berechnen. Das Ergebnis lautet:

$$\begin{aligned}
 (1.33) \quad & \frac{k'^2}{C^2 V(q)^2} \cdot a = \\
 & \frac{|\vec{p}'|^2 \sin^2 \tilde{\nu}'}{(p'^0 - |\vec{p}'| \cos \tilde{\nu}')^2} \cdot (4p'^2 - q^2) + \frac{|\vec{p}|^2 \sin^2 \tilde{\nu}}{(p^0 - |\vec{p}| \cos \tilde{\nu})} (4p'^2 - q^2) \\
 & + 2 k'^2 \cdot \frac{|\vec{p}|^2 \sin^2 \tilde{\nu} + |\vec{p}'|^2 \sin^2 \tilde{\nu}'}{(p^0 - |\vec{p}| \cos \tilde{\nu})(p'^0 - |\vec{p}'| \cos \tilde{\nu}')} \\
 & - 2 \cdot \frac{|\vec{p}| |\vec{p}'| \sin \tilde{\nu} \sin \tilde{\nu}' \cos \phi}{(p^0 - |\vec{p}| \cos \tilde{\nu})(p'^0 - |\vec{p}'| \cos \tilde{\nu}')} (4p^0 p'^0 - q^2 + 2 k'^2)
 \end{aligned}$$

a und daher auch der Wirkungsquerschnitt L_a verschwinden also, wenn Elektron und Photon exakt in Vorwärtsrichtung ausgesandt werden ($\tilde{\nu} = \tilde{\nu}' = 0$). Die in dem Ausdruck enthaltenen Nenner $p^0 - |\vec{p}| \cos \tilde{\nu}$, $p'^0 - |\vec{p}'| \cos \tilde{\nu}'$ bewirken jedoch, daß die gestreuten Elektronen und die Bremsstrahlquanten in einem Kegel um die Vorwärtsrichtung mit einem Öffnungswinkel der Größenordnung $1/p^0$ konzentriert sind. Bei Elektronenergien im GeV-Gebiet beträgt dieser Winkel nur Bruchteile von mrad. Da wir uns im Hinblick auf die kohärente Bremsstrahlung nur für den extremrelativistischen Grenzfall interessieren, kann

in den folgenden Rechnungen neben der Hochenergienäherung

$$(1.34) \quad (p^0)^2 \gg 1 \quad ; \quad (p'^0)^2 \gg 1$$

auch immer noch die Kleinwinkelnäherung

$$(1.35) \quad \mathcal{N}^2 \ll 1 \quad ; \quad \mathcal{N}'^2 \ll 1$$

benutzt werden. Diese Näherungen sind in dem Sinne gemeint, daß in einer Potenzreihenentwicklung Glieder der Größenordnung $1/(p^0)^2$, $1/(p'^0)^2$, $\mathcal{N}^2$, $\mathcal{N}'^2$ gegen 1 vernachlässigt werden sollen.

Mit den in (1.13) angegebenen Ausdrücken für die Größen $T'^{\dot{x}}$ lassen sich die Koeffizienten b^2, b^3 berechnen. Das Resultat lautet für extremrelativistische Energien (1.34) und bei Benutzung der Kleinwinkelnäherung (1.35)

$$(1.36) \quad \frac{k'^{02}}{4p^{02}p'^{02}c^2V_{(q)}^2} b^2 = -\frac{1}{(1+p^{02}\mathcal{N}^2)^2} - \frac{1}{(1+p'^{02}\mathcal{N}'^2)^2} \\ - \frac{2p'^{02}\mathcal{N}'^2 \sin^2 \phi}{(1+p'^{02}\mathcal{N}'^2)^2} + \frac{2+p^{02}\mathcal{N}^2+p'^{02}\mathcal{N}'^2-2p^0p'^0\mathcal{N}\mathcal{N}'\cos\phi}{(1+p^{02}\mathcal{N}^2)(1+p'^{02}\mathcal{N}'^2)}$$

$$(1.37) \quad \frac{k'^{02}}{8p^{02}p'^{02}c^2V_{(q)}^2} b^3 = p'^0\mathcal{N}'\sin\phi \left[\frac{p'^0\mathcal{N}'\cos\phi}{(1+p'^{02}\mathcal{N}'^2)^2} - \frac{p^0\mathcal{N}}{(1+p^{02}\mathcal{N}^2)(1+p'^{02}\mathcal{N}'^2)} \right]$$

Findet der Bremsstrahlprozeß in einer Ebene statt, ($\phi=0$), dann folgt $b^3=0$. Liegen alle Impulse auf einer Geraden ($\mathcal{N}=\mathcal{N}'=0$), so verschwindet auch noch b^2 , beides im Einklang mit den in (1.31) aufgestellten Beziehungen.

Die Ausdrücke $B^{\dot{x}(i)}$ lassen sich nicht so mühelos berechnen, weil die Spuren eine γ^5 -Matrix enthalten. Wegen

$$(1.38) \quad \text{Sp}(\gamma^5 \hat{a}_1 \hat{a}_2 \hat{a}_3 \hat{a}_4) = -4 \det(a_1, a_2, a_3, a_4)$$

führt die Auswertung auf etwa 50 verschiedene Determi-

nanten. Um diese zu berechnen, müssen die darin vorkommenden Vierervektoren in Komponenten aufgespalten und dann die Determinanten einzeln ausgerechnet werden. Mit den Näherungen (1.34) und (1.35) erhält man als End-
ergebnis:

$$(1.39) \frac{k'^0}{2p^0 p'^0 c^2 V_{(q)}^2} B^{1(1)} = \frac{2p^{02} p'^0 \tilde{\nu}^2}{(1+p^{02} \tilde{\nu}^2)^2} + \frac{2p'^{03} \tilde{\nu}^{12}}{(1+p'^{02} \tilde{\nu}^{12})^2} \\ + \frac{p'^{02} k'^0 \tilde{\nu}^{12} + p^{02} k'^0 \tilde{\nu}^2 - 2p^0 p'^0 (p^0 + p'^0) \tilde{\nu} \tilde{\nu}' \cos \phi}{(1+p^{02} \tilde{\nu}^2)(1+p'^{02} \tilde{\nu}^{12})}$$

$$(1.40) \frac{k'^0}{2p^0 p'^0 c^2 V_{(q)}^2} B^{1(2)} = 2p'^{02} \tilde{\nu}' \cos \phi \left[\frac{1}{(1+p^{02} \tilde{\nu}^2)(1+p'^{02} \tilde{\nu}^{12})} - \frac{1}{(1+p'^{02} \tilde{\nu}^{12})^2} \right] \\ + 2p^0 p'^0 \tilde{\nu} \left[\frac{1}{(1+p^{02} \tilde{\nu}^2)(1+p'^{02} \tilde{\nu}^{12})} - \frac{1}{(1+p^{02} \tilde{\nu}^2)^2} \right]$$

$$(1.41) \frac{k'^0}{2p^0 p'^0 c^2 V_{(q)}^2} B^{1(3)} = 2p'^{02} \tilde{\nu}' \sin \phi \left[\frac{1}{(1+p^{02} \tilde{\nu}^2)(1+p'^{02} \tilde{\nu}^{12})} - \frac{1}{(1+p'^{02} \tilde{\nu}^{12})^2} \right]$$

Bei $\phi = 0$ folgt $B^{1(3)} = 0$ im Einklang mit (1.31). Daß im Fall $\tilde{\nu} = \tilde{\nu}' = 0$ neben dem Koeffizienten $B^{1(2)}$ auch $B^{1(1)}$ verschwindet, liegt daran, daß dann auch $\alpha = 0$ gilt, und die zirkulare Polarisation

$$(1.42) \quad \xi^{11} = \frac{B^{1(1)}}{\alpha}$$

für alle Winkel $\tilde{\nu}, \tilde{\nu}'$ beschränkt bleiben muß. Mit diesem Kriterium läßt sich sofort erkennen, daß die in ¹⁸⁾ angegebenen Polarisationskoeffizienten fehlerhaft sind, denn sie verschwinden nicht in dem Spezialfall $\tilde{\nu} = \tilde{\nu}' = 0$. Das dürfte auch der Grund dafür sein, daß dort die Mittelung über die Azimuthwinkel zu falschen Ergebnissen führt.

1.4 Mittelung über die Richtung der Endimpulse

Da im extremrelativistischen Grenzfall die Elektronen und Photonen in einem sehr schmalen Kegel um die Vorwärtsrichtung konzentriert sind, lassen sich einzelne Raumwinkelelemente dieses Kegels nur schwer ausblenden. Für den Experimentator haben daher nur die Mittelwerte von Wirkungsquerschnitt und Polarisierung über die Richtung der Endimpulse der gestreuten Teilchen eine praktische Bedeutung. Die experimentelle Untersuchung der Bremsstrahlung im extremrelativistischen Gebiet erfolgt dann so, daß man die Strahlung auf ein Target schickt und die entstehenden Elektron-Positron-Paare einer bestimmten Energie mit geeignet orientierten Szintillationszählern auffängt. Dieser experimentellen Situation entspricht die Mittelung über die Raumwinkelelemente $\Omega_{\vec{p}'} \Omega_{\vec{k}'}$. Die Energie k'^0 der Bremsstrahlung bleibt dann als einzige unabhängige Variable übrig. Denn die Bremsstrahlung im äußeren stationären Feld ist durch 5 unabhängige Variable gekennzeichnet, weil die 8 Komponenten der Viererimpulse p'^{μ}, k'^{μ} der Endteilchen durch die folgenden 3 Nebenbedingungen eingeschränkt sind:

$$\begin{aligned} p^0 &= p'^0 + k'^0 \\ (1.43) \quad p^2 &= p'^2 = -1 \\ k'^2 &= 0 \end{aligned}$$

Die Mittelung über die Richtung der Endimpulse soll nun für die oben ausgerechneten Polarisationskoeffizienten durchgeführt werden. Nach der Mittelung ist der Vorgang um die Vorwärtsrichtung $\vec{p}$ rotationssymmetrisch. Denn bei einer Drehung von $\vec{p}', \vec{k}'$ um $\vec{p}$ um einen beliebigen Winkel bleiben die Winkel $\vartheta, \vartheta', \Phi$ konstant, also auch der Wirkungsquerschnitt (1.33). Zu jedem differentiellen Pro-

zeß ist also der um einen beliebigen Winkel gedrehte mit gleicher Wahrscheinlichkeit vertreten. Faßt man nun je zwei Prozesse, die durch eine Drehung von $\frac{\pi}{2}$ auseinander hervorgehen, zu einem Paar zusammen, so erkennt man aus dem Transformationsverhalten (1.30), daß sich für jedes einzelne Paar die transversalen Photonpolarisationen gegenseitig kompensieren. Deshalb kann nach (1.31) 3. Spalte die gemittelte Bremsstrahlung im amorphen Target nur eine zirkuläre Polarisation besitzen, und das auch nur, wenn das primäre Elektron eine longitudinale Polarisation besitzt.

Die Integration des Wirkungsquerschnittes L^a über die Richtung der Impulse der Endteilchen wurde zuerst von Bethe¹⁹⁾ durchgeführt. Die 4 Integrationsvariablen werden dabei in 3 Hilfsvariable und in Funktionen von $q = |\vec{q}|$ umgeformt. Die Integrationen über die Hilfsvariablen lassen sich dann elementar ausführen, während die Integration über q zuletzt als im allgemeinen Fall numerisch auszuwertendes Integral übrigbleibt. Deshalb läßt sich der erhaltene Ausdruck für beliebige Potentiale benutzen. Im extremrelativistischen Grenzfall erhält Bethe das Ergebnis:

$$(1.44) \quad \frac{d\delta}{dk^{10}} = \frac{Z^2}{137} \cdot \frac{e^4}{k^{10}} \cdot I(x) \quad ; \quad x := \frac{k^{10}}{p^0}$$

Dabei ist Z die Kernladungszahl, e die Elektronenladung und $I(x)$ der folgende Ausdruck für die geeignet normierte Intensität als Funktion der relativen Photonenenergie x :

$$(1.45) \quad I(x) = [1 + (1-x)^2] \Psi_1^c(\delta) - \frac{2}{3}(1-x) \Psi_2^c(\delta)$$

$$\delta = \frac{x}{2p^0(1-x)}$$

$$\Psi_1^c(\delta) = 4 + 4 \int_{\delta}^1 V(q)^2 (q-\delta)^2 q \, dq$$

$$\Psi_2^c(\delta) = \frac{10}{3} + 4 \int_{\delta}^1 V(q)^2 [q^3 - 6\delta^2 q \ln \frac{q}{\delta} + 3\delta^2 q - 4\delta^3] \, dq$$

Anschaulich bedeutet δ den minimalen Impulsübertrag bei der Bremsstrahlung. Dieser liegt dann vor, wenn alle Impulse parallel zueinander liegen, so daß

$$(1.46) \quad \begin{aligned} \delta &= |\vec{p}| - |\vec{p}'| - |\vec{k}'| = v p^0 - v' p'^0 - k'^0 \\ &= p'^0(1-v') - p^0(1-v) = \frac{1}{p'^0(1+v')} - \frac{1}{p^0(1+v)} \end{aligned}$$

Im extremrelativistischen Grenzfall kann für die Geschwindigkeiten v, v' des Elektrons im Anfangs- bzw. Endzustand gesetzt werden: $1+v = 1+v' = 2$, so daß man tatsächlich erhält:

$$(1.47) \quad \delta = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{p'^0} - \frac{1}{p^0} \right] = \frac{k'^0}{2p^0 p'^0} = \frac{x}{2p^0(1-x)}$$

Dieselbe Rechnung gilt für die Komponente

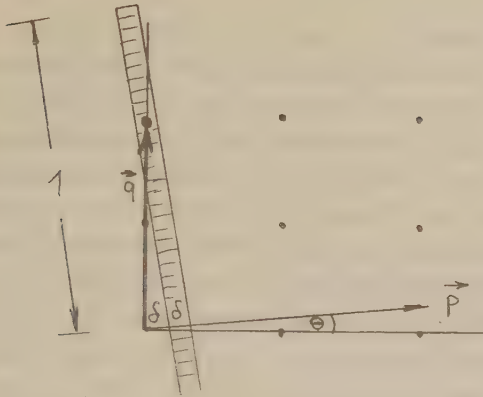
$$(1.48) \quad q_{||} = \vec{q} \cdot \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|}$$

des Impulsübertrags $\vec{q}$ in Richtung von $\vec{p}$, d.h. diese Größe ist ebenfalls durch δ nach unten beschränkt. Aber auch beliebig große Werte von $\vec{q}$ kann man ausschließen, weil die ihnen entsprechenden Prozesse sehr unwahrscheinlich sind. Aus einer Diskussion des differentiellen Wirkungsquerschnitts $L \cdot a$ in (1.33) kann man entnehmen, daß die Rückstoßimpulse insgesamt durch folgende Bedingungen eingeschränkt sind:

$$(1.49) \quad \begin{aligned} \delta &\leq q_{||} \leq 2\delta \\ 0 &\leq q_{\perp} \leq 1 \quad ; \quad q_{||}^2 + q_{\perp}^2 = q^2 \end{aligned}$$

Da bei den von uns betrachteten Elektronenergien im GeV-Gebiet für $x \leq 0,95$ gilt $\delta \ll 1$, ist es jetzt auch verständlich, daß die q -Integration in den Größen χ_1^c, χ_2^c nur von δ bis 1 läuft und nicht etwa von 0 bis ∞ . Räumlich gesehen liegen also die möglichen Werte von $\vec{q}$ in einem scheibenförmigen Bereich der Dicke δ

um die Richtung $\vec{p}$, der vom Ursprung den Abstand δ besitzt.



Überall¹⁾ nennt diesen Bereich "Pfannkuchen".

In Ähnlicher Weise wie beim Wirkungsquerschnitt soll jetzt der Mittelwert der zirkularen Photonpolarisation

$$(1.50) \quad \bar{\xi}^{(1)} = \frac{\mathcal{B}^{(1)}}{a}$$

von total longitudinal polarisierten Elektronen bestimmt werden. Wie in der Einleitung erläutert wurde, muß dazu jeder Teilstrahl mit einem zum differentiellen Wirkungsquerschnitt proportionalen Gewichtungsfaktor multipliziert werden. Der Polarisationsmittelwert $\bar{\xi}^{(1)}$ wird also definiert durch

$$(1.51) \quad \bar{\xi}^{(1)} = \frac{\int \xi^{(1)} a d\Omega_{\vec{p}'} d\Omega_{\vec{k}'}}{\int a d\Omega_{\vec{p}'} d\Omega_{\vec{k}'}} = \frac{\int \mathcal{B}^{(1)} d\Omega_{\vec{p}'} d\Omega_{\vec{k}'}}{\int a d\Omega_{\vec{p}'} d\Omega_{\vec{k}'}}$$

Glücklicherweise besitzt der Koeffizient $\mathcal{B}^{(1)}$ dieselbe Struktur wie a , so daß die Integration nach dem von Bethe entwickelten Verfahren durchgeführt werden kann. Das Ergebnis läßt sich sogar durch dieselben Größen (1.45) wie der gemittelte Wirkungsquerschnitt ausdrücken:

$$(1.52) \quad \overline{\xi^{14}} = \frac{x \cdot \left\{ (2-x) \psi_1^c(\delta) - \frac{2}{3} (1-x) \psi_2^c(\delta) \right\}}{I(x)}$$

Ebenfalls eine Mittelung der zirkularen Photonpolarisation von longitudinal polarisierten Elektronen, allerdings nur über die Richtung der Elektronendimpulse, ist von Mc Voy²⁰⁾ durchgeführt worden. Die dort erhaltenen physikalischen Aussagen können sich jedoch von unseren nur wenig unterscheiden. Denn da die Bremsstrahlung in einem sehr schmalen Kegel um die Vorwärtsrichtung konzentriert ist, läßt eine nachträgliche Mittelung über die Richtung der Photonen den Polarisationsmittelwert praktisch unverändert. Daher ist unser einfaches Endergebnis den unübersichtlichen Ausdrücken von ²⁰⁾ vorzuziehen.

Eine weitere Vereinfachung ergibt sich in unserem Fall durch den Umstand, daß bei extremrelativistischen Elektronenergien die Größen $\psi_1^c(\delta)$, $\psi_2^c(\delta)$ praktisch unabhängig von der relativen Photonenenergie x werden. Für das in (3.2) angegebene abgeschirmte Coulombpotential von Kohlenstoff haben wir bei $p^0 = 6 \text{ GeV}$ durch maschinelle Auswertung mit 0,5% Genauigkeit im Intervall $0,1 \leq x \leq 0,9$ folgende Zahlenwerte gefunden:

$$(1.53) \quad \psi_1^c = 18,4 \quad ; \quad \psi_2^c = 17,8$$

Diese angenäherte Konstanz von ψ_1^c, ψ_2^c gilt für alle Elektronenergien im GeV-Gebiet. So erhält man z.B. für $p^0 = 1 \text{ GeV}$ mit 2% Genauigkeit ebenfalls im Intervall $0,1 \leq x \leq 0,9$

$$(1.54) \quad \psi_1^c = 18,3 \quad ; \quad \psi_2^c = 17,7$$

Daher bietet die Diskussion der Intensität I und des

Mittelwertes $\bar{\xi}^{11}$ überhaupt keine Schwierigkeit mehr. In der Fig. 1 ist das Ergebnis für $p^0 = 6 \text{ GeV}$ aufgetragen. Man erkennt, daß der zirkulare Polarisationsgrad bei wachsendem x immer mehr ansteigt und bei $x = 1$ ein Maximum von 100% erreicht. Dieses letzte Ergebnis hätte man auch schon direkt aus (1.52) ablesen können. Genaugenommen dürften wir unsere Resultate auf den Grenzfall $x = 1$ nicht ausdehnen, weil wir in unseren Rechnungen immer die Hochenergienäherung $p^{10} \gg 1$ benutzt haben. Bei Energien im GeV-Gebiet ist aber diese Näherung bis $x = 0,99$ erfüllt, d.h. praktisch bis $x = 1$.

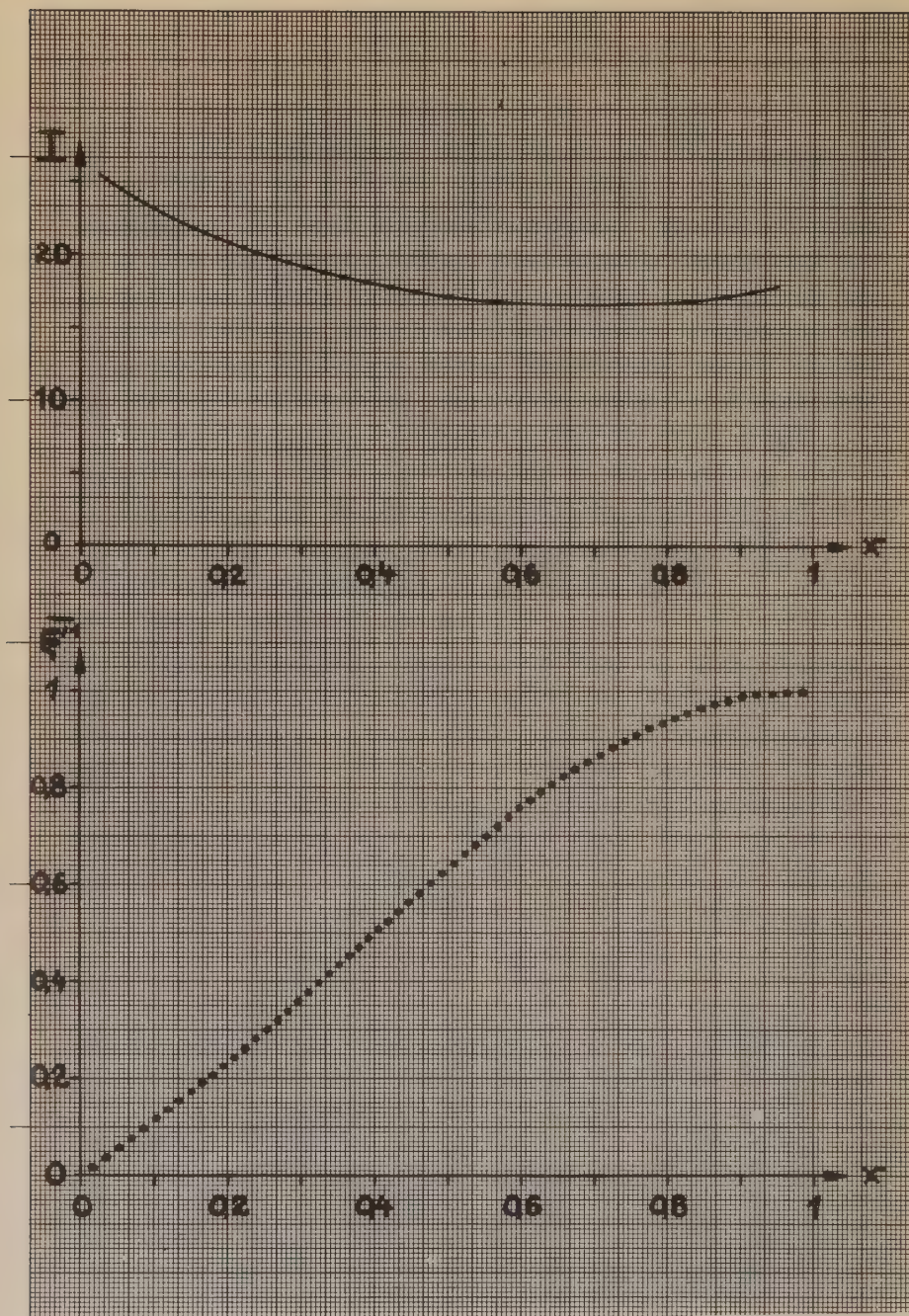


Fig.1. Intensität I und Zirkularpolarisation ξ^1 der Bremsstrahlung von total longitudinal polarisierten 6 GeV-Elektronen im amorphen Target. Die Einheit von I ist dabei $2,09 \cdot 10^{-26} \text{cm}^2$.

2. Bremsstrahlung im Kristall

Wir wollen jetzt die im 1. Kapitel abgeleiteten Beziehungen der Bremsstrahlung im Feld eines einzelnen Atoms auf einen Einkristall erweitern. Es ist dabei zu erwarten, daß wegen der periodischen Gitterstruktur besondere Effekte auftreten, die bei einem amorphen Target fehlen. In 2.1 wird daher zunächst der Übergang vom Einzelprozeß zum Kristall vollzogen. Dann wird in 2.2 der Mittelungsprozeß bei einem Kristall erläutert und in 2.3, 2.4 die Mittelung der transversalen und zirkularen Photonpolarisation durchgeführt.

2.1 Übergang vom Einzelprozeß zum Kristall

Die in 1. durchgeführten Rechnungen der Bremsstrahlung im Feld eines einzelnen Kernes lassen sich auf einen Kristall übertragen, indem man das Potential $V(\vec{r})$ durch ein periodisches Gitterpotential

$$(2.1) \quad V_{\text{Kr}}(\vec{r}) = \sum_{\vec{L}} V(\vec{r} + \vec{L})$$

ersetzt, wobei über alle Gittervektoren $\vec{L}$ zu summieren ist. Im Impulsraum tritt dann an die Stelle der Fouriertransformierten

$$(1.22) \quad V(\vec{q}) = \int V(\vec{r}) e^{i\vec{q}\vec{r}} d\vec{r}$$

der Ausdruck

$$(2.2) \quad V_{\text{Kr}}(\vec{q}) = \int \sum_{\vec{L}} V(\vec{r} + \vec{L}) e^{i\vec{q}\vec{r}} d\vec{r},$$

den man nach der Variablensubstitution $\vec{r} + \vec{L} \rightarrow \vec{r}$ umschreiben

kann zu

$$(2.3) \quad V_{kr}(\vec{q}) = \sum_{\vec{r}} e^{-i\vec{q}\vec{r}} V(\vec{q})$$

Da der differentielle Wirkungsquerschnitt und die Polarisationen für die Bremsstrahlung am Einzelatom proportional zu $|V(\vec{q})|^2$ sind, besteht die Wirkung des Kristalls also darin, die Ausdrücke für ein einzelnes Atom mit dem Faktor

$$(2.4) \quad K_0(\vec{q}) = \left| \sum_{\vec{r}} e^{-i\vec{q}\vec{r}} \right|^2$$

zu multiplizieren. Wenn die Gesamtzahl N der Atome im Kristall sehr groß ist, so ergibt die Ausrechnung näherungsweise

$$(2.5) \quad K_0(\vec{q}) = N \frac{(2\pi)^3}{\Delta} \sum_{\vec{g}} |F(\vec{g})|^2 \delta(\vec{q} - 2\pi \vec{g})$$

Dabei ist Δ das Volumen der Einheitszelle und $\vec{g}$ ein Vektor im reziproken Gitter. Durch den Strukturfaktor $F(\vec{g})$ wird die spezielle Kristallstruktur berücksichtigt. Schiebt man nämlich mehrere einfache Gitter zu einem neuen zusammen (was z.B. beim Diamant der Fall ist, vgl. Abschnitt 3.1), so können die einzelnen Grundgitter derart interferieren, daß bestimmte Richtungen verstärkt werden oder ganz ausfallen. Jeder Punkt im reziproken Gitter ist daher mit einem Faktor $|F(\vec{g})|^2$ versehen, der diese Verhältnisse wiedergibt. Bei einem einfachen kubischen Gitter ist $F(\vec{g}) = 1$.

Aus (2.5) ist zu ersehen, daß im Kristall nur solche Rückstoßimpulse $\vec{q}$ zugelassen sind, die gleich dem 2π -fachen eines Vektors $\vec{g}$ im reziproken Gitter sind. Das Gitter wirkt sich also bei der Bremsstrahlung analog aus wie bei Röntgenstrahlinterferenzen. Auch dort führt die Braggsche Interferenzbeziehung zu der Bedingung, daß die Differenz der Ausbreitungsvektoren gleich einem

Vektor im reziproken Gitter sein mußte (Ewaldsche Kugelkonstruktion). Bei der Bremsstrahlung sind die möglichen Werte von $\vec{q}$ außerdem durch die Kinematik eingeschränkt. Wir hatten in 1.4 erläutert, daß die erlaubten Rückstoßimpulse $\vec{q}$ in einem scheibenförmigen Gebiet um die Richtung des primären Elektronimpulses liegen. Die Summation in (2.5) darf daher bei der Bremsstrahlung auch nur über die Vektoren im reziproken Gitter aus diesem "Pfannkuchen" erfolgen.

Bis jetzt wurde der Kristall als ein periodisches Potential mit ruhenden Gitteratomen idealisiert. Aufgrund der Wärmebewegung vollführen aber die einzelnen Atome Schwingungen um die Gleichgewichtslage, deren Amplitude gegen die Gitterkonstante nicht vernachlässigbar ist. Dieser Effekt läßt sich dadurch berücksichtigen, daß man die in (2.4) enthaltenen Gittervektoren $\vec{L}$ durch $\vec{L} + \vec{u}_L$ ersetzt und über die kleinen statistischen Abweichungen $\vec{u}_L$ mittelt. Führt man diese Rechnung mit einer Debye-Verteilung durch, so wird der ursprüngliche Faktor $K_0(\vec{q})$ modifiziert zu ²¹⁾:

$$(2.6) \quad K(\vec{q}) = e^{-Aq^2} \cdot K_0(\vec{q}) + N(1 - e^{-Aq^2})$$

Der darin enthaltene Debye-Waller-Faktor A ist eine Funktion des Quotienten T/T_D von absoluter Temperatur T und Debye-Temperatur T_D und zwar wächst A bei größeren Werten von T/T_D . Die Temperaturbewegung wirkt sich also so aus, daß der mit der δ -Funktion versehene Faktor $K_0(\vec{q})$ abgeschwächt wird und ein neuer Summand hinzutritt. Physikalisch bedeutet das, daß die von dem Faktor $K_0(\vec{q})$ herrührenden diskontinuierlichen Kristalleffekte (Intensitätskanten usw.) von einem Kontinuum überlagert werden.

2.2 Allgemeines zur Mittelung bei einem Kristall

Wie bei einem einzelnen Atom im Abschnitt 1.4 sollen auch für den Kristall der Wirkungsquerschnitt und die Polarisationen über die Richtung der Endimpulse gemittelt werden. Die in 1.3 berechneten Koeffizienten sind dazu mit dem Faktor $K(\vec{q})$ aus (2.6) und a zu multiplizieren und dann über $d\Omega_{\vec{p}'}$ $d\Omega_{\vec{q}'}$ zu integrieren. Dabei kann bei dem zweiten Summanden von $K(\vec{q})$, der nur von q^2 abhängt, auf die Ergebnisse von 1.4 zurückgegriffen werden. Denn die Integration wurde dort so durchgeführt, daß die über q als letzte übrigblieb, und daher der Faktor $(1 - e^{-\Lambda q^2})$ jetzt noch nachträglich in die Integranden von Ψ_1^c , Ψ_2^c eingesetzt werden kann.

Eine neue Integrationstechnik erfordert dagegen der erste Summand von $K(\vec{q})$, der die 3-dimensionale δ -Funktion enthält. Diese bewirkt, daß von den 4 Integrationen über $\Omega_{\vec{p}'}$ und $\Omega_{\vec{q}'}$ nur noch eine auszuführen ist. Fallen die Elektronen genau in Richtung einer Achse $\vec{a}$ im reziproken Gitter auf, so liefert der erste Summand von $K(\vec{q})$ keinen Beitrag, weil dann der "Pfannkuchen" keinen Punkt im reziproken Gitter enthält (vgl. das Beispiel im Abschnitt 3.2). Alle wesentlichen Kristalleffekte erhält man aber bereits dann, wenn man annimmt, daß $\vec{p}$ mit $\vec{a}$ einen kleinen Winkel Θ bildet. Diese Voraussetzung ermöglicht es, die ebenfalls kleinen Winkel $\vec{\beta}, \vec{\beta}'$ in einfacher Weise auf die raumfeste $\vec{\beta}, \vec{a}$ -Ebene umzurechnen. Außerdem hat dann der "Pfannkuchen" eine besonders günstige Lage, was sich bei der Auswertung im Abschnitt 3.2 als große Vereinfachung auswirkt.

Die Technik der bei den Mittelungen auszuführenden Integrationen übernehmen wir von Überall.¹⁾ Dabei werden

die 4 Integrationsvariablen in 1 Hilfsvariable und in 3 Größen des Impulsübertrags $\vec{q}$ umgeformt, z.B. in die Komponenten

$$(2.7) \quad \begin{aligned} q_{\perp} &= q \cdot \cos \Theta \approx q \\ q_{\parallel} &= q \cdot \sin \Theta \approx q \cdot \Theta \end{aligned}$$

senkrecht bzw. parallel zu $\vec{p}$ und in einen Azimuthwinkel. Die Relationen (2.7) kann man aus der Skizze auf S.25 direkt ablesen. Die Integration über die Hilfsvariable läßt sich dann elementar ausführen, und von der anschließenden Integration über die $\delta^{(3)}$ -Funktion bleibt dann nur eine Summe über die reziproken Gitterpunkte übrig. Für den Wirkungsquerschnitt erhält man nach diesem Verfahren:

$$(2.8) \quad \frac{d\sigma}{dk'^0} = \frac{2^2}{137} \frac{e^4}{k'^0} \cdot N \cdot I(x, \Theta)$$

$$I(x, \Theta) = [1 + (1-x)^2] [\psi_1(\delta, \Theta) + \psi_1^c(\delta)] - \frac{2}{3} (1-x) [\psi_2(\delta, \Theta) + \psi_2^c(\delta)]$$

Der Kontinuumsbeitrag wird durch die Terme ψ_1^c, ψ_2^c geliefert, d.h. durch die in (1.45) eingeführten numerischen Integrale, nur daß jetzt wie oben erläutert ein zusätzlicher Faktor $(1 - e^{-Aq^2})$ im Integranden erscheint. Der Gitterbeitrag $\psi_1(\delta, \Theta), \psi_2(\delta, \Theta)$ besteht aus den folgenden Summen:

$$(2.9) \quad \begin{aligned} \psi_1(\delta, \Theta) &= \frac{(2\pi)^2}{\Delta} 4\delta \sum_{\vec{g}} |F(\vec{g})|^2 V(q)^2 \exp(-Aq^2) \frac{q_{\perp}^2}{q_{\parallel}^2} \\ \psi_2(\delta, \Theta) &= \frac{(2\pi)^2}{\Delta} 24\delta^2 \sum_{\vec{g}} |F(\vec{g})|^2 V(q)^2 \exp(-Aq^2) \frac{q_{\perp}^2}{q_{\parallel}^4} (q_{\parallel} \cdot \Theta - \delta) \end{aligned}$$

Die Summation ist dabei über alle kinematisch erlaubten Werte $\vec{q} = 2\pi \vec{g}$ zu erstrecken.

Nach dem oben skizzierten Verfahren wollen wir nun auch die Photonpolarisation über die Richtung der Endimpulse mitteln. Dabei tritt eine besondere Vereinfachung auf, wenn $\vec{p}$ in einer Kristallebene liegt. Denn dann enthält der "Pfannkuchen" zu jedem Gitterpunkt auch den an dieser Ebene gespiegelten. Wählt man für diese Ebene die x, z -Ebene eines kartesischen Koordinatensystems und legt $\vec{p}$ in die z -Achse, d.h. $\vec{p} = |\vec{p}| \{0, 0, 1\}$, so ist mit $\vec{q} = \{q_1, q_2, q_3\}$ auch $\vec{q} = \{q_1, -q_2, q_3\}$ ein kinematisch erlaubter Rückstoßimpuls.

Diese Spiegelung läßt sich durch die Transformation PD_{π} erzeugen, wobei die Drehung D_{π} in der ausgezeichneten Kristallebene durchzuführen ist. Nun ist zu jedem differentiellen Prozeß der durch die Transformation PD_{π} hervorgehende mit gleicher Wahrscheinlichkeit vertreten. Denn spaltet man auch $\vec{p}', \vec{k}'$ in Komponenten auf:

$$(2.10) \quad \begin{aligned} \vec{p}' &= |\vec{p}'| \{ \sin \vartheta' \cos \varepsilon, \sin \vartheta' \sin \varepsilon, \cos \vartheta' \} \\ \vec{k}' &= |\vec{k}'| \{ \sin \vartheta \cos (\varepsilon + \phi), \sin \vartheta \sin (\varepsilon + \phi), \cos \vartheta \} \end{aligned}$$

wobei mit ε der Winkel zwischen der x, z -Ebene und der $\vec{p}, \vec{p}'$ -Ebene bezeichnet wurde, so erkennt man, daß die Transformation PD_{π} mit der Ersetzung von ε, ϕ durch $-\varepsilon, -\phi$ identisch ist. Der mit dem Faktor $K(\vec{q})$ modifizierte Wirkungsquerschnitt (1.33) hängt nun vom Winkel ε überhaupt nicht und von ϕ nur über $\cos \phi$ ab. Für die gemittelten Polarisierungen gelten daher im Kristall die Folgerungen aus der PD_{π} -Invarianz (2. Spalte von (1.31)), während bei einem amorphen Target der Vorgang um die Vorwärtsrichtung $\vec{p}$ rotationssymmetrisch war (3. Spalte von (1.31)). Aus diesem Unterschied lassen sich bereits charakteristische Eigenschaften der kohärenten Bremsstrahlung erkennen:

1.) Das Nichtverschwinden des gemittelten Koeffizien-

ten $\overline{B}^2$ bedeutet, daß die Bremsstrahlung unpolarisierter Elektronen im Kristall im Gegensatz zum amorphen Target auch nach der Mittelung transversal polarisiert ist.

- 2.) Wegen $\overline{B}^{(12)} \neq 0$ kann man bei Elektronen, die in der ausgezeichneten Kristallebene transversal polarisiert sind, nach der Mittelung neben der transversalen auch noch eine zirkulare Photonpolarisation erwarten.

Bisher wurde angenommen, daß $\vec{\beta}$ in einer Kristallebene liegt. Eine allgemeinere Kristallorientierung wird im Anhang A diskutiert. Es wird dabei gezeigt werden, daß sich auch dieser Fall auf die hier abgeleiteten Ergebnisse zurückführen läßt.

2.3 Mittelung der transversalen Photonpolarisation

Um die transversale Photonpolarisation über die Richtung der Endimpulse mitteln zu können, müssen die in (1.9) eingeführten Bezugsbeine $\hat{h}^{(2)}, \hat{h}^{(3)}$ zuerst auf ein kristallfestes Koordinatensystem bezogen werden. Es sei χ der Winkel zwischen der $\vec{p}, \vec{k}'$ -Ebene und der raumfesten $\vec{p}, \vec{a}$ -Ebene. Dann werden die neuen Bezugsbeine definiert durch

$$(2.11) \quad \hat{h}^{(2)*} = \cos \chi \hat{h}^{(2)} + \sin \chi \hat{h}^{(3)}; \quad \hat{h}^{(3)*} = -\sin \chi \hat{h}^{(2)} + \cos \chi \hat{h}^{(3)}$$

Durch diese Transformation wird erreicht, daß sich die Polarisationsvektoren bei einer Drehung von $\vec{k}'$ um $\vec{p}$ nicht mitdrehen. Sie verändern sich dabei zwar exakt mathematisch immer noch, weil sie weiterhin senkrecht auf $\hat{k}'$ stehen, aber in der Näherung $\chi^2 \ll 1$ kann man sie als

kristallfest betrachten. Das dazugehörige Transformationsverhalten der Stokes'schen Parameter wurde bereits in (1.30) abgeleitet.

Aus den Invarianzbetrachtungen des vorhergehenden Abschnittes folgt nun, daß nur ξ^{12*} nach der Mittelung nicht verschwindet. Multipliziert man wie in (1.51) die Polarisation jedes Einzelstrahls mit dem Gewichtungsfaktor $a_{kr} = a \cdot K(\vec{q})$, so ist der gesuchte Mittelwert zu berechnen aus:

$$(2.12) \quad \overline{\xi^{12*}} = \frac{\int \xi^{12*} a_{kr} d\Omega_{\vec{p}'} d\Omega_{\vec{k}'}}{\int a_{kr} d\Omega_{\vec{p}'} d\Omega_{\vec{k}'}} \\ = \frac{\int [\ell^2 \cos 2\gamma + \ell^3 \sin 2\gamma] d\Omega_{\vec{p}'} d\Omega_{\vec{k}'}}{\int a_{kr} d\Omega_{\vec{p}'} d\Omega_{\vec{k}'}}$$

Der Nenner dieses Ausdrucks wurde bereits bei der Mittelung des Wirkungsquerschnittes behandelt. Bei der Berechnung des Zählers müssen auch die Terme $\cos 2\gamma, \sin 2\gamma$ als Funktionen von $\vec{q}$ dargestellt werden, damit dann die Integration über $\delta(\vec{q} - 2\pi \vec{q})$ in einfacher Weise durchführbar ist. Dieser Teil der Rechnung wird im Anhang B kurz skizziert.

Für das Endergebnis erhält man im Einklang mit ³⁾:

$$(2.13) \quad \overline{\xi^{12*}} = \frac{2 \cdot (1-x) \psi_3(\delta, \theta)}{I(x, \theta)} \\ \psi_3(\delta, \theta) = \frac{(2\pi)^2}{\Delta} 4J^3 \sum_{\vec{q}} |F(\vec{q})|^2 V(q)^2 \exp(-Aq^2) \frac{q_{\perp}^2}{q_{\parallel}^4} \cos 2\gamma$$

Mit γ wurde der Winkel zwischen der $\vec{p}, \vec{a}$ -Ebene und der $\vec{q}, \vec{a}$ -Ebene bezeichnet.

2.4 Mittelung der zirkularen Photonpolarisationen

Nach den Ergebnissen des Abschnittes 2.2 besitzt die kohärente Bremsstrahlung nach der Mittelung über die Richtung der Endimpulse zusätzlich zu der transversalen noch eine zirkuläre Polarisation, wenn die Elektronen entweder longitudinal oder transversal in der ausgezeichneten Kristallebene polarisiert sind:

$$(2.14) \quad \overline{\xi^{11}} = Z_1 \xi^{(1)} + Z_2 \xi^{(2)*}$$

Bei der Berechnung von Z_1 , d.h. des Mittelwertes der zirkularen Photonpolarisation

$$(2.15) \quad \xi^{11} = \frac{B^{1(1)}}{a_{kr}}$$

von total longitudinal polarisierten Elektronen ist eine Umrechnung der Beine $k^{(2)}, k^{(3)}$ auf ein kristallfestes Bezugssystem nicht notwendig, da nach (1.30) gilt: $\xi^{1*} = \xi^1$ und die Änderung von k^1 in der Näherung $\lambda^2 \ll 1$ zu vernachlässigen ist. Auch auf der Elektronenseite ist eine Transformation nicht erforderlich, da der in (1.8) definierte Bezugsvektor $t^{(1)}$ für die longitudinale Elektronpolarisation gegen Drehungen um $\vec{p}$ invariant ist. Z_1 läßt sich also direkt berechnen aus:

$$(2.16) \quad Z_1 = \frac{\int B^{1(1)} d\Omega_{\vec{p}'} d\Omega_{\vec{k}'}}{\int a_{kr} d\Omega_{\vec{p}'} d\Omega_{\vec{k}'}}$$

Nach Zusammenfassung mit dem in (1.52) angegebenen Kontinuumsanteil haben wir für diesen Ausdruck erhalten:

$$(2.17) \quad Z_1 = \frac{x \cdot \left\{ (2-x) [\psi_1(\delta, \theta) + \psi_1^c(\delta)] - \frac{2}{3} (1-x) [\psi_2(\delta, \theta) + \psi_2^c(\delta)] \right\}}{I(x, \theta)}$$

Wie beim amorphen Target erreicht also im Kristall die von einer longitudinalen Elektronpolarisation herrührende zirkulare Polarisation bei der maximalen Photonenenergie $x = 1$ den Wert 100%.

Bei der Berechnung der zirkularen Photonpolarisation von transversal polarisierten Elektronen ist wie bei der Mittelung von $B^{(1)}$ keine Transformation von $h^{(2)}, h^{(3)}$ notwendig. Dagegen müssen jetzt die Bezugsvektoren $t^{(2)}, t^{(3)}$ für die transversale Elektronpolarisation analog zu (2.11) über die Relationen

$$(2.18) \quad t^{(2)*} = \cos \gamma t^{(2)} + \sin \gamma t^{(3)}; \quad t^{(3)*} = -\sin \gamma t^{(2)} + \cos \gamma t^{(3)}$$

in exakt kristallfeste Vektoren umgerechnet werden. Die Zirkularpolarisation der Bremsstrahlung von Elektronen, die in der $\vec{p}, \vec{a}$ -Ebene total transversal polarisiert sind, wird dann berechnet aus:

$$(2.19) \quad Z_2 = \frac{\int [\cos \gamma B^{(2)} + \sin \gamma B^{(3)}] d\Omega_{\vec{p}'} d\Omega_{\vec{k}'}}{\int d\Omega_{\vec{p}'} d\Omega_{\vec{k}'}}$$

Im Zähler werden für $\cos \gamma, \sin \gamma$ die Werte (B.8), (B.10) aus dem Anhang B und für $B^{(2)}, B^{(3)}$ die Ausdrücke (1.40), (1.41) eingesetzt. Dann bietet die Integration nach der im Abschnitt 2.2 geschilderten Technik keine prinzipiellen Schwierigkeiten mehr, sie ist jedoch sehr langwierig. Das Ergebnis unserer Rechnungen lautet:

$$(2.20) \quad Z_2 = \frac{8x(1-x)\gamma_4(\delta, \theta)}{I(x, \theta)}$$

$$\gamma_4(\delta, \theta) = \frac{(2\pi)^2}{\Delta} \sum_{\vec{q}} |F(\vec{q})|^2 V_q^2 \exp(-Aq^2) \frac{q_{\perp}^2}{\theta} \left(\frac{\delta}{q_{\parallel}}\right)^2 \left[1 - 6\left(\frac{\delta}{q_{\parallel}}\right) + 6\left(\frac{\delta}{q_{\parallel}}\right)^2\right]$$

Es ist also $Z_2 = 0$ für $x = 0$ und $x = 1$. Wie groß die Polarisationen an den dazwischenliegenden Stellen sind, läßt sich erst durch die numerische Auswertung bestimmen.

3. Auswertung und Ergebnisse

3.1 Der Diamantkristall

Wie in der Einleitung erläutert wurde, spezialisieren wir uns bei der Auswertung auf den Diamantkristall, weil bei diesem die störende Temperaturbewegung besonders gering ist. Der Diamant besteht aus zwei kubisch flächenzentrierten Gittern, die gegeneinander um $1/4$ der Raumdiagonale verschoben sind. Die Gitterkonstante des Grundgitters sei a , so daß für das Volumen der Einheitszelle zu setzen ist: $\Delta = a^3$. Der Zahlenwert ist $a = 3,56 \cdot 10^{-8}$ cm oder in Einheiten der Compton-Wellenlänge $a = 922$.

Als Bezugsrichtungen wählen wir die Kristallachsen $[110]$, $[1\bar{1}0]$, $[001]$, d.h. die Normalen der Netzebenen mit den Millerschen Indizes $1,1,0$; $1,-1,0$ und $0,0,1$. Diese Achsen wurden nach dem Gesichtspunkt möglichst hoher Besetzungsdichte im reziproken Gitter ausgesucht. Bei dem Strukturfaktor für Diamant können nur die drei Fälle $|F(\vec{q})|^2 = 0, 4, 8$ auftreten, wie in ²¹⁾ S. 147 abgeleitet wird. In der Fig. 2 ist das dabei entstehende hexagonale Schema für die $[001]$, $[1\bar{1}0]$ - Ebene aufgezeichnet.

Der Debye-Waller-Faktor A für einen Diamantkristall beträgt bei Zimmertemperatur $A = 126$.¹⁾

Für das Potential eines einzelnen Gitteratoms wird ein abgeschirmtes Coulombpotential

$$(3.1) \quad V(\vec{r}) = \frac{1}{r} \cdot e^{-\frac{r}{\lambda}}$$

angenommen. Im Impulsraum folgt daraus:

$$(3.2) \quad V(q) = \frac{1}{q^2 + \beta^{-2}}$$

Der Abschirmradius β beträgt für einen Kern der Ordnungszahl Z (24)

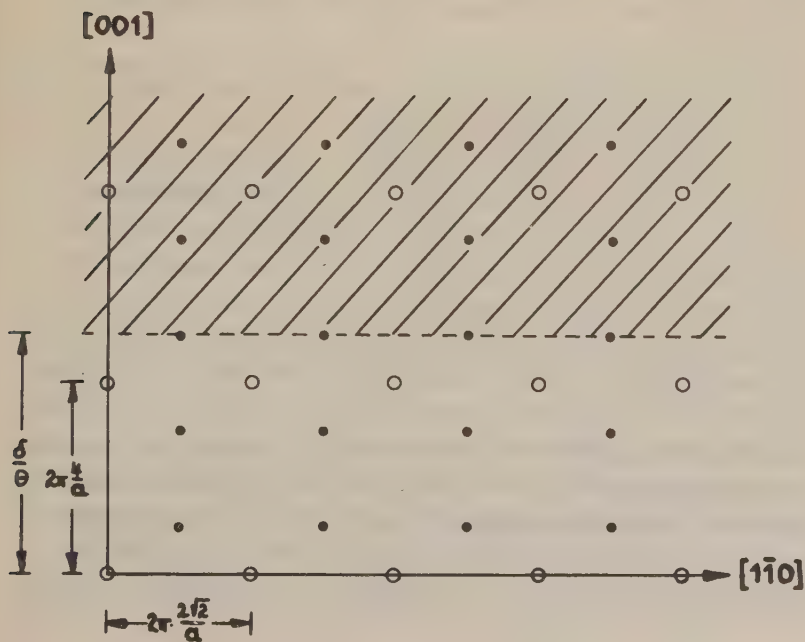
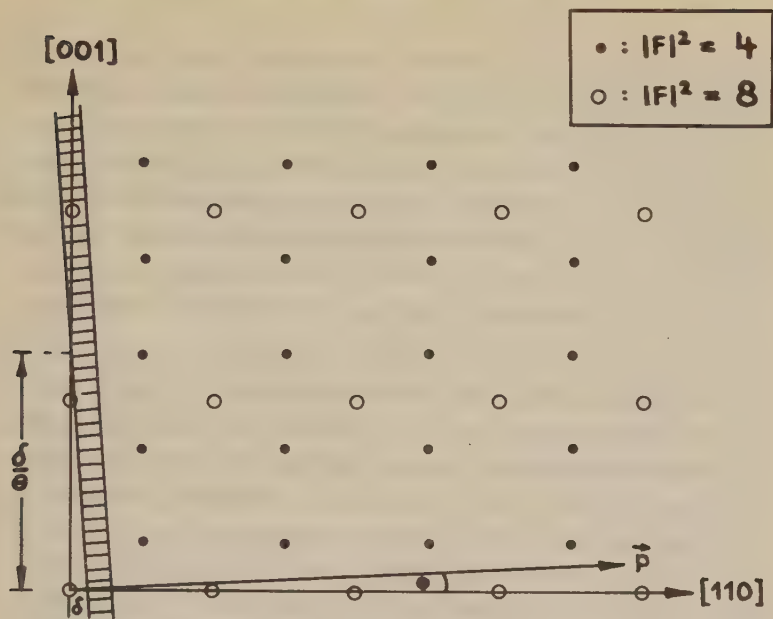
$$(3.3) \quad \beta = 111 Z^{-\frac{1}{3}}$$

Für Kohlenstoff ($Z = 6$) erhält man $\beta = 61,1$. Eine Deformation der Elektronenhüllen durch das Gitter würde sich in sehr grober Näherung in einer Verringerung von β auswirken. Bei einem reinen Coulombpotential wäre dagegen $\beta = \infty$

3.2 Diskussion einer speziellen Kristallorientierung

In diesem Abschnitt wollen wir die Lage der kinematisch erlaubten Rückstoßimpulse und die Summationsvorschrift über die Vektoren im reziproken Gitter an einem speziellen Beispiel näher erläutern. Wir wählen den Fall, daß der Elektronimpuls $\vec{p}$ mit der Achse $[110]$ den kleinen Winkel Θ einschließt und in der $[110]$, $[001]$ -Ebene liegt. Die Lage des "Pfannkuchens" ist im oberen Teil der Fig. 2 schraffiert eingezeichnet. Die Verhältnisse lassen sich aber nur sehr verzerrt wiedergeben. Denn bei den von uns betrachteten Elektronenergien im GeV-Gebiet gilt für den Minimalimpuls in den Einheiten $\hbar = c = m = 1$ $\delta \approx 10^{-4}$, während der Abstand des ersten Gitterpunktes auf der $[110]$ -Achse vom Ursprung $2\sqrt{2}/a \approx 10^{-2}$ beträgt. Da die Dicke des "Pfannkuchens" auch nur von der Größenordnung δ ist, bedeutet das, daß der überwiegende Beitrag von Gitterpunkten in der ersten Ebene durch den Ursprung stammt. Denn die Schnittflächen des "Pfannkuchen" mit den folgenden Gitterebenen sind so

Fig.2. Lage des "Pfannkuchen" im reziproken Gitter von Diamant. $\vec{p}$ bildet mit der Achse $[110]$ den Winkel θ und liegt in der Ebene der Achsen $[110]$ und $[001]$.



weit vom Ursprung entfernt, daß deren Beiträge vernachlässigt werden können. Die Summation in den Ausdrücken Ψ_1 bis Ψ_4 wird daher auch nur über die kinematisch erlaubten Rückstoßimpulse in der $[001]$, $[\bar{1}\bar{1}0]$ -Ebene erstreckt. Diese wesentliche Vereinfachung erklärt auch, weshalb wir in unseren Rechnungen den Winkel Θ immer als klein vorausgesetzt haben, denn nur dann sind die obigen Überlegungen gültig. In der Praxis wird Θ in der Größenordnung mrad gewählt.

Im unteren Teil der Fig. 2 ist die $[001]$, $[\bar{1}\bar{1}0]$ -Ebene in die Zeichenebene geklappt und der im "Pfannkuchen" liegende Bereich durch Schraffur angedeutet. Wie aus (1.45) zu ersehen ist, vergrößert sich der Abstand δ/Θ vom Ursprung bei wachsenden Photonenenergien X , so daß dann an bestimmten Stellen X_K eine ganze Gitterreihe immer ausfällt. Das erklärt das Auftreten der Intensitätskanten und der übrigen diskontinuierlichen Kristalleigenschaften.

In einem Rechenprogramm zur Auswertung der Summen muß daher zunächst festgelegt werden, über welche Gitterpunkte summiert werden soll und welche aufgrund der Kinematik ausgelassen werden müssen. Außerdem können natürlich nicht alle Punkte im "Pfannkuchen" bei der Summation berücksichtigt werden. Aus der Struktur der Ausdrücke Ψ_1 bis Ψ_4 ist aber zu ersehen, daß die dem Ursprung am nächsten gelegenen Gitterpunkte den größten Beitrag liefern. Daher können die weit außen liegenden Punkte vernachlässigt werden. Wir haben die Berechnung aller Summen mit einer verschiedenen Anzahl von Gitterreihen durchgeführt und gefunden, daß man die Summation auf etwa 100 nullpunktsnahe Gitterpunkte beschränken kann. Denn bei der Hinzunahme weiterer Gitterpunkte bleiben die Summen Ψ_1 bis Ψ_4 praktisch unverändert. Eine

besondere Betrachtung erfordern die Intensitäts- und Polarisationsverhältnisse in der Umgebung der Kantenstellen X_K . Denn da dann jeweils eine ganze Gitterreihe ausfällt, sind sehr starke Sprünge in der Umgebung dieser Stellen zu erwarten. Wir haben daher die Werte X_K sehr genau bestimmt und dann Intensität und Polarisation jeweils an den Stellen $X_K \pm \Delta X_K$ ($\Delta X_K \ll X_K$) berechnet.

Die hier kurz skizzierten Untersuchungen und die endgültige Auswertung der von uns berechneten Ausdrücke wurden mit einem ALGOL-Programm an der Rechenanlage TR 4 der Bayerischen Akademie der Wissenschaften in München durchgeführt.

3.3 Ergebnisse

Es wurden drei verschiedene Kristallorientierungen betrachtet:

- a) $\vec{p}$ bildet mit $[110]$ den Winkel Θ und liegt in der $[110], [001]$ -Ebene.
- b) $\vec{p}$ bildet mit $[110]$ den Winkel Θ und liegt in der $[110], [\bar{1}\bar{1}0]$ -Ebene.
- c) $\vec{p}$ bildet mit $[110]$ den Winkel Θ und $\alpha = 4,5^\circ$ ist der Winkel zwischen der Ebene $\vec{p}, [110]$ und der Ebene $[001], [110]$.

Der Fall a) wurde im vorhergehenden Abschnitt ausführlich besprochen. Nach demselben Prinzip läßt sich auch b) behandeln. Für c) findet man nähere Angaben im Anhang A. a) und b) sind Spezialfälle von c) für $\alpha = 0$ bzw.

In der Fig. 3 sind die Ergebnisse für die Orientierung a) bei total longitudinal polarisierten Elektronen und für die Werte $p^0 = 6 \text{ GeV}$, $\Theta = 1,24 \text{ mrad}$ graphisch dargestellt. Im oberen Teil ist die nach (2.8) normierte Bremsstrahlintensität I aufgetragen, deren Kantencharakter nach den obigen Betrachtungen vorherzusehen war. Der durch die Funktionen ψ_1^c, ψ_2^c gegebene Kontinuumsbeitrag beträgt in den ersten 3-4 Kanten 2,5-5% der Gesamtintensität, sodaß sich an diesen Stellen eine 40-20-fache Intensitätssteigerung gegenüber einem amorphen Target mit gleicher Atomanzahl erzielen läßt.

Die Polarisation der Bremsstrahlung findet man im unteren Teil der Figur. $\overline{\xi}^{12*}$ ist der nach (2.13) berechnete Mittelwert der transversalen Photonpolarisation. In der 1. Intensitätskante ist $\overline{\xi}^{12*} = 0,56$, d.h. die Photonen sind dann zu 56% in der $[110]$, $[001]$ -Ebene transversal polarisiert. In den folgenden Kanten ist der Polarisationsgrad dagegen viel geringer, und die Polarisationsrichtung liegt wegen $\overline{\xi}^{12*} < 0$ senkrecht zur $[110]$, $[001]$ -Ebene. Diese transversale Polarisation tritt bereits bei der kohärenten Bremsstrahlung von unpolarisierten Elektronen auf. Bei longitudinal polarisierten Elektronen kommt eine zirkulare Photonpolarisation $\overline{\xi}^{11}$ neu hinzu, die in (2.17) angegeben wurde. Der Vergleich mit Fig. 1 ergibt, daß diese Polarisation denselben charakteristischen Verlauf wie bei einem amorphen Target besitzt. Daher scheint die zirkulare Photonpolarisation von der speziellen Kristallorientierung weitgehend unabhängig zu sein. Diese Erwartung wird durch die Rechnung für die Fälle b) und c) und für verschiedene Elektronenergien im GeV-Gebiet bestätigt. Es ergibt sich immer derselbe Anstieg der zirkularen Photonpolarisation, so daß die Verhältnisse gar nicht mehr gesondert aufgezeichnet werden müssen.

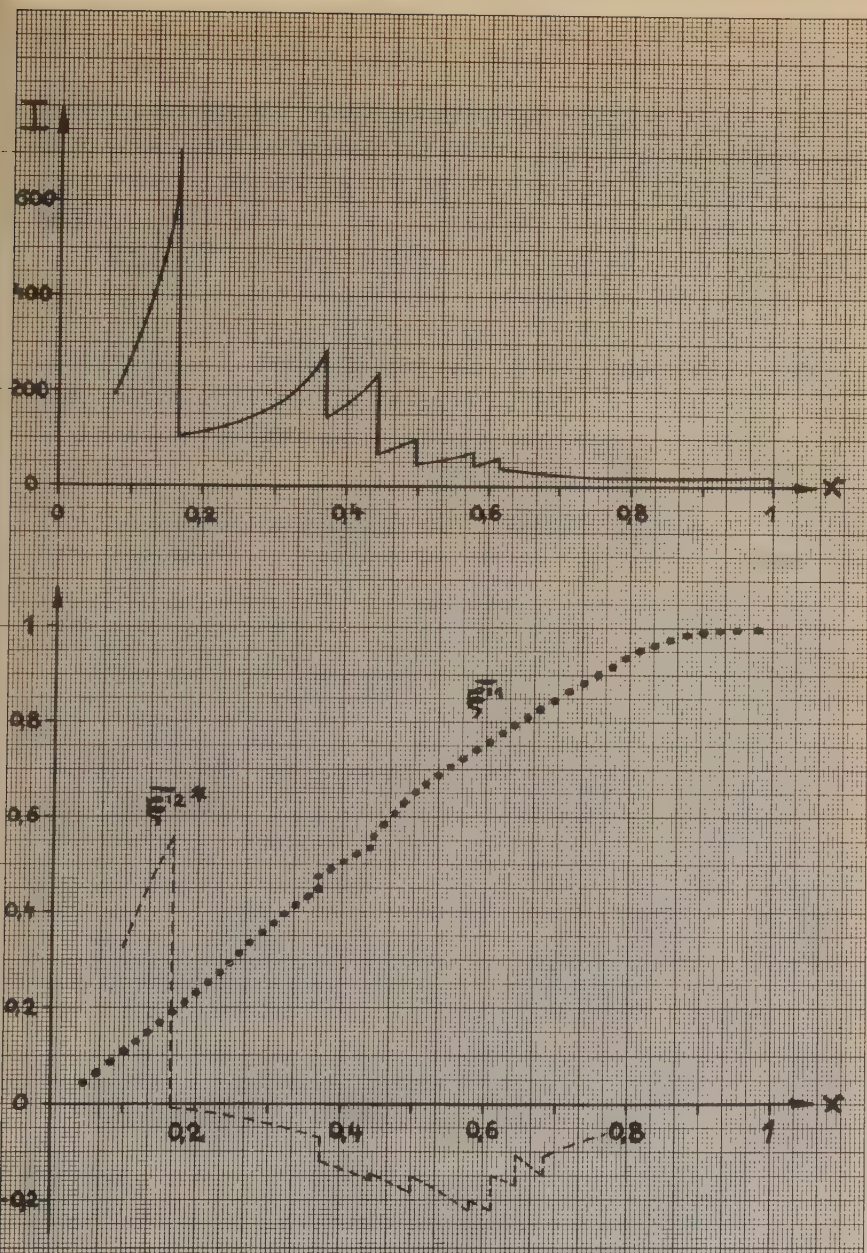


Fig.3. Intensität I und Polarisation der kohärenten Bremsstrahlung von total longitudinal polarisierten 6 GeV-Elektronen in einem Diamantkristall. $\vec{P}$ bildet mit der Achse $[110]$ den Winkel $\theta = 1,24$ mrad und liegt in der Ebene der Achsen $[110]$ und $[001]$. I in denselben Einheiten wie in Fig.1.

Auch eine graphische Darstellung für die nach (2.20) auftretende zirkuläre Photonpolarisation, die von in der $[110]$, $[001]$ -Ebene transversal polarisierten Elektronen herrührt, erübrigt sich. Bei allen Kristallorientierungen ist nämlich dieser Polarisationsgrad kleiner als 1%, so daß er gegenüber der überlagerten transversalen Photonpolarisation vernachlässigt werden kann. Transversal polarisierte extremrelativistische Elektronen verhalten sich also bezüglich der Polarisationsseigenschaften der durch sie ausgelösten Bremsstrahlung wie unpolarisierte Elektronen.

Wir haben auch die Intensität und Polarisation der kohärenten Bremsstrahlung in Abhängigkeit von dem temperaturabhängigen Debye-Waller-Faktor A und von der Abschirmkonstante β untersucht. Wie zu erwarten, bewirkt ein Absinken der Temperatur (Verringerung von A) ein stärkeres Hervortreten der diskontinuierlichen Kristalleigenschaften über den kontinuierlichen Untergrund, d.h. ein Ansteigen der Kantenintensitäten und der darin auftretenden transversalen Photonpolarisationen. Diese Effekte sind jedoch nur schwach ausgeprägt. Stärker ist dagegen die Abhängigkeit von der Abschirmkonstanten β . Und zwar liefert eine schwächere Abschirmung ein Anwachsen der Intensität $I(x, \theta)$, wie anschaulich verstanden werden kann. Denn mit Verringerung der Abschirmung steigt die effektive Kernladungszahl, so daß dann die Wahrscheinlichkeit für die Bremsstrahlung im Feld dieses Kerns ebenfalls anwächst. Allerdings steigt $\chi_3(\delta, \theta)$ nicht so rasch wie $I(x, \theta)$, so daß die transversale Photonpolarisation

$$\overline{\xi_{12}^*} = \frac{2 \cdot (1-x) \chi_3(\delta, \theta)}{I(x, \theta)}$$

in der 1. Kante bei einer schwächeren Abschirmung ebenfalls abfällt. So ist z.B. bei einem reinen Coulomb-

potential ($\beta = \infty$) für die zur Fig. 3 zugehörige Kristallorientierung in der 1. Kante $I(x, \theta) = 2930$ und $\xi_{12}^* = 0,41$. Im Abschnitt 3.1 hatten wir erläutert, daß sich der Einfluß des Gitters aber eher in einer Verringerung von β bemerkbar macht. Für $\beta = 60$ ist dann in der 1. Kante die Intensität auf $I(x, \theta) = 690$ abgesunken, und der Polarisationsgrad bleibt bei $\xi_{12}^* = 0,56$. Analoge Verhältnisse liegen für die folgenden Intensitätskanten vor. Die zirkulare Photonpolarisation ξ_{11} ist dagegen in allen Fällen weitgehend unabhängig von β .

Wir fassen jetzt die Vorteile des Kristalls gegenüber dem amorphen Target zur Bremsstrahlerzeugung noch einmal kurz zusammen:

- 1.) An bestimmten Stellen des Bremsstrahlspektrums bewirkt der Kristall eine große Intensitätssteigerung gegenüber dem amorphen Target. Da die Zirkularpolarisation der γ -Strahlung von longitudinal polarisierten Elektronen im Kristall und im amorphen Target praktisch dieselbe ist, kann auf diese Weise besonders intensive zirkular polarisierte Bremsstrahlung hergestellt werden. Dieser Vorteil des Kristalls besteht allerdings nur bis zu einer relativen Photonenenergie $x = 0,6$. Denn darüber hinaus liefern Kristall und amorphes Target dieselbe Bremsstrahlintensität und Zirkularpolarisation.
- 2.) Beim Kristall tritt im Gegensatz zum amorphen Target eine transversale Photonpolarisation auf, die in der 1. Intensitätskante am größten ist.

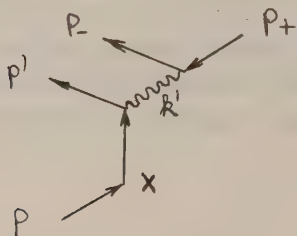
Während in der 1. Kante die Photonen praktisch rein transversal polarisiert sind, ist die Polarisation in den folgenden also hauptsächlich zirkular. Da man die Kantenlage durch eine Änderung der Kristallorientierung verschieben kann, lassen sich somit die Polarisation

der γ -Strahlung und deren Energie weitgehend den jeweiligen experimentellen Erfordernissen anpassen.

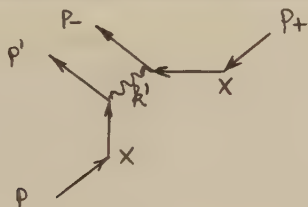
3.4 Messung der longitudinalen Polarisierung extremrelativistischer Elektronen über die kohärente Bremsstrahlung

Über die kohärente Bremsstrahlung ergibt sich nun auch eine verbesserte Möglichkeit, die longitudinale Polarisierung extremrelativistischer Elektronen zu bestimmen. Bisher wurden zur Messung einer Elektronenpolarisation Asymmetrien in Streuprozessen (Mott-, Møller-, Bhabha-streuung) benutzt. Zwar bleiben bei Energien im GeV-Gebiet für longitudinal polarisierte Elektronen diese Asymmetrieeffekte in ausreichender Größe bestehen.¹⁷⁾ Sie sind aber entweder auf den Bereich der Rückwärtsstreuung (Mottstreuung) oder Vorwärtsstreuung (Møller-, Bhabha-streuung) beschränkt, so daß es große experimentelle Schwierigkeiten bereiten dürfte, diese gestreuten Elektronen zu untersuchen.

Eine Messung der longitudinalen Polarisierung extremrelativistischer Elektronen wäre auch möglich über die Asymmetrien in der Paarerzeugung bei der Wechselwirkung dieser Elektronen mit einem äußeren Feld. Da das bei diesem Prozeß ausgetauschte Photon k' auch virtuell sein kann, wird die niedrigste Bornsche Näherung durch folgenden Graphen repräsentiert:



Das zu dieser niedrigsten Ordnung zugehörige Element der S-Matrix ist hermitesch bzw. schiefhermitesch. Daher liefert wie bei der Mottstreuung dieser Graph noch keine Asymmetrien, sondern erst dessen Interferenzterme mit einem Graphen der nächsthöheren Ordnung, z.B. mit



Es würde nun den Rahmen dieser Arbeit weit übersteigen, Wirkungsquerschnitt $\tilde{\sigma}$ und Asymmetrie ΔI dieser Prozesse zu berechnen. Daher wollen wir nur deren Größenordnung, ausgedrückt in Potenzen der Kopplungskonstanten $\alpha = \frac{1}{137}$ angeben. In den Feynmangraphen entspricht jeder Elektronecke einem Faktor $\sqrt{\alpha}$ und jeder Angriffsstelle x des äußeren Feldes eines Kerns der Ordnungszahl Z wegen

$A^e(q) \sim \frac{Ze}{q^2}$ einem zusätzlichen Faktor $Z\sqrt{\alpha}$. Der obige Graph niedrigster Näherung ist daher von der Größenordnung $Z^2\alpha^2$, der Wirkungsquerschnitt also $\tilde{\sigma} \sim Z^2\alpha^4$.

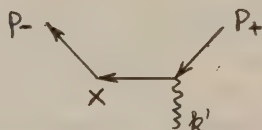
Der Interferenzterm mit dem nächsthöheren Graphen der Ordnung $Z^2\alpha^3$ wird proportional zu $Z^3\alpha^5$, so daß man für die Asymmetrie die Größenordnung $\Delta I \sim \frac{Z^3\alpha^5}{Z^2\alpha^4} = Z\alpha$ erwarten kann. Es ergeben sich also wahrscheinlich nur kleine Werte für Wirkungsquerschnitt und Asymmetrie. Dazu stehen einer Bestimmung der longitudinalen Elektronpolarisation über Asymmetrien bei Prozessen dieser Art große Schwierigkeiten in experimenteller Hinsicht entgegen. Denn die Elektron-Positron-Paare müßten in Koinzidenz nachgewiesen und außerdem die gestreuten Elektronen p' von den bei der Paarbildung entstehenden Elektronen p getrennt

werden. Das aber dürfte ohne einen großen experimentellen Aufwand wohl kaum möglich sein. Die Bestimmung der longitudinalen Polarisation extremrelativistischer Elektronen wird sich daher nur schwer über Asymmetrieeffekte bei direkten Streuprozessen durchführen lassen.

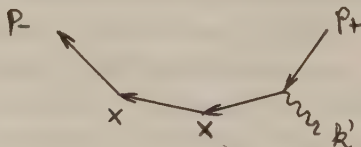
Daher scheint es sinnvoll zu sein, eine longitudinale Polarisation von Elektronen im GeV-Gebiet mittels Bremsstrahlung auf eine zirkuläre Photonpolarisation zu übertragen, weil für diese auch bei hohen Energien ausreichende Meßmöglichkeiten vorhanden sind. Um dabei eine möglichst hohe Intensität der Bremsstrahlung zu erhalten, wird es zweckmäßig sein, statt eines amorphen Targets einen Einkristall zu verwenden. Die Zirkularpolarisation der entstehenden kohärenten Bremsstrahlung ließe sich dann auf folgende Weise messen:

- 1.) Asymmetrien in der Paarerzeugung zirkular polarisierter γ -Strahlen im äußeren Feld.

Wieder liefert der folgende Graph der Ordnung $Z^2 \alpha^{\frac{3}{2}}$

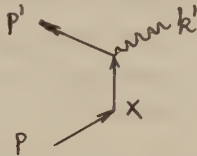


noch keine Asymmetrien, sondern erst dessen Interferenzterme mit einem Graphen der Ordnung $Z^2 \alpha^{5/2}$, z.B. mit



Die dabei entstehenden Asymmetrien sind proportional zu $\Delta I \sim \frac{Z^2 \alpha^{3/2} Z^2 \alpha^{5/2}}{Z^2 \alpha^3} = Z^2 \alpha$. Sie wurden in ²³⁾

berechnet, wegen der Kompliziertheit der erhaltenen Ausdrücke allerdings nur für eine spezielle Kinematik, bei der die zu $\vec{k}' \cdot (\vec{p}_+ \times \vec{p}_-)$ proportionale Asymmetrie besonders groß ist. Zusammen mit der vorangegangenen Bremsstrahlerzeugung im äußeren Feld:



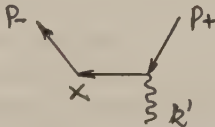
von der Größenordnung $Z\alpha^{3/2}$ und dem Wirkungsquerschnitt $\sigma_0 \sim Z^2\alpha^3$ ergibt sich also für den zusammengesetzten Prozeß:

longitudinal polarisiertes Elektron $\rightarrow$ zirkular polarisierte Bremsstrahlung $\rightarrow$ Elektron-Positron-Paare
 der Wirkungsquerschnitt $\sigma \sim Z^4\alpha^6$ und die Asymmetrie $\Delta I \sim Z\alpha$.

Gegenüber dem oben diskutierten direkten Prozeß erhält man also dieselbe Asymmetrie, aber einen um den Faktor $Z^2\alpha^2$ geringeren Wirkungsquerschnitt. Der zusammengesetzte Prozeß hat aber den Vorteil, daß durch den folgenden Kunstgriff die Asymmetrie vergrößert werden kann:

2.) Asymmetrien in der Paarerzeugung transversal polarisierter γ -Strahlen im äußeren Feld.

Bei transversal polarisierten Photonen k' werden bereits bei dem Prozeß in niedrigster Näherung:



die Elektron-Positron-Paare vorzugsweise in der von $\vec{k}'$ und dem Photonpolarisationsvektor aufgespannten Ebene

ausgesandt. Die Asymmetrie ist dann von der Größenordnung α^0 im Gegensatz zu $Z\alpha$ bei zirkular polarisierten γ -Strahlen. Auch ist die Bestimmung einer transversalen Polarisation von γ -Strahlen auf diese Weise bereits erfolgreich durchgeführt worden.⁹⁾ Das in 1.) beschriebene Verfahren läßt sich daher verbessern, wenn man die von longitudinal polarisierten Elektronen ausgelöste zirkular polarisierte Bremsstrahlung vor der Paarbildung in eine transversal polarisierte umwandelt. Dies läßt sich erreichen, wenn man die zirkular polarisierte Bremsstrahlung durch einen Kristall von einer geeigneten Dicke schickt. In ²²⁾ wurde nämlich gezeigt, daß beim Durchgang von Photonen durch einen Kristall die Absorption von der Richtung der transversalen Photonpolarisation abhängt. Über die Dispersionsrelationen erhält man dann auch verschiedene Werte des Brechungskoeffizienten für diese Richtungen, d.h. eine Doppelbrechung wie in der gewöhnlichen Optik. Man kann also auch bei Photonenenergien im GeV-Gebiet mit einem " $\frac{\lambda}{4}$ -Blättchen" eine Phasendrehung von $\frac{\pi}{2}$ erzielen. Die Dicke eines " $\frac{\lambda}{4}$ -Blättchens" liegt dann in der Größenordnung einiger cm, und der Intensitätsverlust der durchlaufenden γ -Strahlen ist kleiner als 1%. So läßt sich die Zirkularpolarisation der Bremsstrahlung praktisch ohne Verlust in eine Transversalpolarisation umwandeln, umgekehrt natürlich auch eine Transversalpolarisation in eine Zirkularpolarisation. Allerdings ist die Dicke des " $\frac{\lambda}{4}$ -Blättchens" wie in der gewöhnlichen Optik eine Funktion der Photonenenergie, so daß die Umwandlung der Polarisationen nur für einen sehr schmalen Bereich des Bremsstrahlspektrums möglich ist. Es wird daher sehr vorteilhaft sein, bei der Herstellung der zirkular polarisierten Bremsstrahlung von longitudinal polarisierten Elektronen statt eines amorphen Targets einen Einkristall

zu verwenden. Denn dann läßt sich die Dicke des " $\frac{\lambda}{4}$ - Blättchens" so wählen, daß gerade die zirkular polarisierten Photonen einer bestimmten Intensitätskante in transversal polarisierte umgewandelt werden, und daher bei der folgenden Paarbildung eine große Intensitätssteigerung erzielt werden kann. Dieser Intensitätsgewinn ist für die erste Kante am größten. Man erhält dann allerdings bei total longitudinal polarisierten Elektronen nur etwa 20% Zirkularpolarisation und einen viel höheren Prozentsatz Transversalpolarisation der Photonen, d.h. nach dem Durchgang durch ein " $\frac{\lambda}{4}$ - Blättchen" 20% Transversalpolarisation überlagert von einer hohen Zirkularpolarisation. Die letztere dürfte bei der anschließenden Asymmetriemessung nicht stören, da ja hierfür die Effekte um den Faktor $Z\alpha$ kleiner sind als bei transversal polarisierten Photonen. Doch da diese nur zu maximal 20% transversal polarisiert sein können, wird dadurch der Asymmetrieeffekt herabgesetzt. Man wird daher durch geeignete Kristallorientierung die Lage der 1. Intensitätskante zu möglichst hohen relativen Photonenenergien x hinschieben, weil dann ohne nennenswerten Intensitätsverlust die interessierende Zirkularpolarisation ansteigt. Spielt für den Experimentator die Intensitätsfrage nur eine untergeordnete Rolle, so kann er auch die Dicke des " $\frac{\lambda}{4}$ - Blättchens" einer der folgenden Intensitätskanten anpassen, weil er auch so höhere Werte der Zirkularpolarisation erhalten kann.

Für eine Messung der longitudinalen Polarisation von Elektronen im GeV-Gebiet liefert somit die Kette: longitudinal polarisiertes Elektron $\rightarrow$ zirkular polarisierte Bremsstrahlung $\rightarrow$ transversal polarisierte Bremsstrahlung $\rightarrow$ Elektron-Positron-Paare einen Gesamtwirkungsquerschnitt $\sigma \sim Z^4 \alpha^6$ und die Asymmetrie $A \sim \alpha^0$

Das Ergebnis für den direkten Prozeß der Paarbildung eines Elektrons im äußeren Feld lautete:

$$\sigma_d \sim Z^2 \alpha^4 ; \Delta I_d \sim Z \alpha$$

so daß

$$(3.4) \quad \frac{\sigma}{\sigma_d} = Z^2 \alpha^2 ; \quad \frac{\Delta I}{\Delta I_d} = \frac{1}{Z \alpha}$$

Nimmt man an, daß im Diamantkristall durch die Kanten-
auswahl eine 40-fache Intensitätssteigerung gegenüber
dem amorphen Target erzielt werden kann, so ist jeder
einzelne Prozeß noch mit diesem Faktor zu multiplizieren.
Es wird dann

$$\frac{\sigma}{\sigma_d} = 40 \left(\frac{6}{137} \right)^2 \approx 0,08 , \quad \frac{\Delta I}{\Delta I_d} = \frac{137}{6} \approx 20$$

Eine Asymmetriemessung wird nun umso zuverlässiger, je
größer die Asymmetrie und die Zählraten sind und zwar
kann für die Güte G einer solchen Messung gesetzt wer-
den: $G = \Delta I \cdot \sqrt{\sigma}$. Für das Verhältnis der Güten
folgt also:

$$\frac{G}{G_d} = \frac{\Delta I}{\Delta I_d} \sqrt{\frac{\sigma}{\sigma_d}} \approx 6$$

Das entsprechende Ergebnis für ein amorphes Target mit
einer beliebigen Ordnungszahl Z lautet:

$$\frac{G}{G_d} = 1$$

Aus diesem Vergleich ist nun ganz deutlich zu erkennen,
daß die Anwendung der obigen Kette von Einzelprozessen
bei der Messung der longitudinalen Polarisation von
Elektronen nur dann eine Verbesserung gegenüber dem di-
rekten Prozeß bringt, wenn man statt eines amorphen
Targets einen Diamantkristall benutzt.

Anhang A: Behandlung einer allgemeineren Kristallorientierung

Wir wollen jetzt die im 1. Kapitel abgeleiteten Beziehungen auf den Fall verallgemeinern, daß der primäre Elektronimpuls $\vec{p}$ nicht mehr in einer Ebene des reziproken Gitters liegt. Der "Pfannkuchen" verläuft dann auch nicht mehr parallel zu einer Gitterachse, so daß bei einem Ansteigen der Photonenenergie immer nur einzelne Gitterpunkte ausfallen und nicht wie bisher eine ganze Gitterreihe. Die transversale Photonpolarisation wird dann hauptsächlich durch einen einzigen nullpunktsnahen Gitterpunkt bestimmt und nicht mehr durch einen dazu symmetrisch gelegenen abgeschwächt. Da man auf diese Weise einen besonders hohen Polarisationsgrad erzielen kann, ist diese Kristallorientierung für den Experimentator besonders interessant.⁸⁾

Bezogen auf drei orthogonale Achsen im reziproken Gitter:

$$(A.1) \quad \vec{a}_1 = \{1, 0, 0\} ; \vec{a}_2 = \{0, 1, 0\} ; \vec{a}_3 = \{0, 0, 1\}$$

wird also jetzt für den Elektronimpuls $\vec{p}$ allgemein angesetzt:

$$(A.2) \quad \vec{p} = |\vec{p}| \{ \sin\theta \cos\alpha, \sin\theta \sin\alpha, \cos\theta \}$$

Der Winkel θ von $\vec{p}$ mit $\vec{a}_3$ soll wie bisher sehr klein sein, während für den Winkel α zwischen der $\vec{a}_1, \vec{a}_3$ -Ebene und der $\vec{p}, \vec{a}_3$ -Ebene nichts vorausgesetzt wird. Dann kann man näherungsweise schreiben:

$$(A.3) \quad \vec{p} = |\vec{p}| \cdot \{ \theta \cos\alpha, \theta \sin\alpha, 1 \}$$

Aus einer analytischen Darstellung des "Pfannkuchens" für diese Orientierung erkennt man dann, daß wie in

3.2 die Rückstoßimpulse $\vec{q}$ für beliebige Winkel α nur in der $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ -Ebene liegen, d.h.

$$(A.4) \quad \vec{q} = \{ q_1, q_2, 0 \}$$

Das hat zur Folge, daß der Bremsstrahlprozeß wieder zu der dazu orthogonalen $\vec{p}, \vec{a}_3$ -Ebene symmetrisch verläuft, so daß sich alle abgeleiteten Beziehungen für Wirkungsquerschnitt und Polarisationen auch für den allgemeinen Fall $\alpha \neq 0, \frac{\pi}{2}$ übernehmen lassen. Man hat nur jetzt für den Rückstoß $q_{||}$ parallel zu $\vec{p}$ zu setzen:

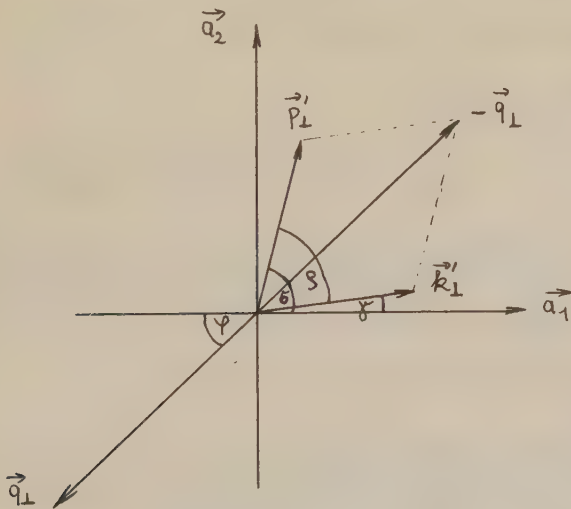
$$(A.5) \quad q_{||} = \vec{q} \cdot \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|} = \Theta (q_1 \cos \alpha + q_2 \sin \alpha)$$

Anhang B: Umrechnung von $\cos \delta$, $\sin \delta$ als Funktion von $\vec{q}$

$$(B.1) \quad \vec{a}_1 = \{1, 0, 0\}; \quad \vec{a}_2 = \{0, 1, 0\}; \quad \vec{a}_3 = \{0, 0, 1\}$$

seien drei orthogonale Kristallachsen. Der primäre Elektronimpuls $\vec{p}$ soll unter dem kleinen Winkel Θ gegen $\vec{a}_3$ auffallen und in der $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ -Ebene liegen. Die Vektoren senkrecht zu $\vec{p}$ liegen dann in der Näherung $\omega\Theta \approx 1$ in der $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ -Ebene und erfüllen nach dem Impulssatz die Beziehung:

$$(B.2) \quad \vec{q}_\perp = -(\vec{k}'_\perp + \vec{p}'_\perp)$$



Mit den bereits in 2.3 eingeführten Winkeln

$$\delta = \angle \{(\vec{p}, \vec{k}') - \text{Ebene}, (\vec{p}, \vec{a}_3) - \text{Ebene}\}; \quad \varphi = \angle \{(\vec{q}, \vec{a}_3) - \text{Ebene}, (\vec{p}, \vec{a}_3) - \text{Ebene}\}$$

und mit

$$(B.3) \quad \angle (\vec{k}'_\perp, \vec{p}'_\perp) = \delta; \quad \angle (\vec{p}'_\perp, \vec{a}_1) = \varphi$$

folgt aus (B.2)

$$(B.4) \quad k'_1 \cos \gamma + p'_1 \cos \delta = q_1 \cos \varphi$$

Wegen $\delta = \gamma + \varphi$ ergibt sich daraus:

$$(B.5) \quad p'^2_1 \sin^2 \gamma = q_1^2 \cos^2 \gamma - 2 q_1 \cos \varphi \cos \gamma (k'_1 + p'_1 \cos \gamma) + q_1^2 \cos^2 \varphi$$

Setzt man darin die aus

$$(B.6) \quad q_1^2 = k'^2_1 + p'^2_1 + 2 k'_1 p'_1 \cos \gamma$$

folgenden Relationen

$$(B.7) \quad k'_1 + p'_1 \cos \gamma = \frac{q_1^2 + k'^2_1 - p'^2_1}{2 k'_1}$$

$$p'^2_1 \sin^2 \gamma = \frac{4 k'^2_1 p'^2_1 - (q_1^2 - k'^2_1 - p'^2_1)}{4 k'^2_1}$$

ein, so erhält man schließlich:

$$(B.8) \quad \cos \gamma = \frac{\cos \varphi}{2 k'_1 q_1} \cdot (q_1^2 + k'^2_1 - p'^2_1) + \frac{\sin \varphi}{2 k'_1 q_1} \cdot \sqrt{4 k'^2_1 p'^2_1 - (q_1^2 - k'^2_1 - p'^2_1)^2}$$

Das bei der Auflösung der quadratischen Gleichung entstehende doppelte Vorzeichen wurde dabei durch die Betrachtung des Spezialfalles

$$(B.9) \quad k'_1 = p'_1; \quad q_1 = \sqrt{2} k'_1; \quad \varphi = \frac{\pi}{4}; \quad \gamma = 0$$

festgelegt.

Auf ähnliche Weise ergibt sich:

$$(B.10) \quad \sin \gamma = \frac{\sin \varphi}{2 k'_1 q_1} \cdot (q_1^2 + k'^2_1 - p'^2_1) - \frac{\cos \varphi}{2 k'_1 q_1} \cdot \sqrt{4 k'^2_1 p'^2_1 - (q_1^2 - k'^2_1 - p'^2_1)^2}$$

Bezeichnungen

- 1.) Wir benutzen natürliche Einheiten $\hbar = c = 1$ und setzen $m = 1$. Damit werden alle Größen dimensionslose Zahlen. Längen werden z.B. in Einheiten der Comptonwellenlänge $\hbar/mc$, Energien in Einheiten der Ruhenergie mc^2 des Elektrons und Impulse in Einheiten $m \cdot c$ gemessen.
- 2.) Lateinische Indizes $i, j, k \dots$ durchlaufen die Werte $1, 2, 3$; griechische $\alpha, \beta \dots$ die Werte $0, 1, 2, 3$.
- 3.) Der metrische Fundamentaltensor hat die Gestalt:

$$g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & & & 0 \\ & +1 & & \\ & & +1 & \\ 0 & & & +1 \end{pmatrix}$$

- 4.) Der Raumanteil eines Vierervektors wird durch einen Pfeil gekennzeichnet, z.B.

$$p^\mu = (p^0, \vec{p})$$

- 5.) Für die Verjüngung eines Vektors mit den Diracschen γ -Matrizen wird das Symbol verwendet:

$$\hat{p} := p_\mu \gamma^\mu$$

Literaturverzeichnis

- 1) Überall, H.: Phys. Rev. 103, 1055 (1956)
- 2) Ders.: Phys. Rev. 107, 223 (1957)
- 3) Ders.: Z. Naturf. 17a, 332 (1962)

- 4) Barbiellini, G. Phys. Rev. Letters 8, 454 (1962)
G. Bologna,
G. Diambrini u.
G.P. Murtas:
- 5) Dies.: Phys. Rev. Letters 9, 46 (1962)
- 6) Dies.: Phys. Rev. Letters 9, 396 (1962)
- 7) Dies.: Nuovo Cimento 28', 435 (1963)

- 8) Bologna, G.
G. Lutz,
H.D. Schulz, Nuovo Cimento 42, 844 (1966)
U. Timm u.
W. Zimmermann:

- 9) Criegee, L.,
G. Lutz,
H.D. Schulz, Phys. Rev. Letters 16, 1031 (1966)
U. Timm u.
W. Zimmermann:

- 10) Lutz, G. u. Z. Naturf. 21 a, 1976 (1966)
U. Timm:

- 11) Barshay, S.: Phys. Letters 3, 320 (1963)

- 12) Berman, S.M: Phys. Rev. 135, B 1249 (1964)

- 13) Neumcke, B.: Diplomarbeit, München 1965

- 14) Neumcke, B.u. Z. Phys. 192, 162 (1966)
H.J. Meister:

- 15) Meister, H.J.: S.B. Bayer. Akad. Wiss., München 1962
- 16) Holzwarth, G.: Diplomarbeit, München 1965
- 17) Ders.: Z. Phys. 191, 354 (1966)
- 18) Wysozki, G.L.: JETP 5 (32), 883 (1957)
A.A. Kresnin u.
L.N. Rosenzweig
- 19) Bethe, H.A.: Proc. Cambridge Phil. Soc. 30, 524
(1934)
- 20) Mc Voy, K.W.: Phys. Rev. 106, 828 (1957); 110,
1484 (1958)
- 21) v. Laue, M: Röntgenstrahlinterferenzen, Leipzig,
1948, S. 231.
- 22) Cabibbo, N.G.
Da Prato,
G. De Franceschi
und U. Mosco: Phys. Rev. Letters 9, 435 (1962)
- 23) Kolbenstvedt, H.
u. H. Olsen: Nuovo Cimento 40 A, 13 (1965)
- 24) Schiff, L.J.: Phys. Rev. 83, 252 (1951)
- 25) Frisch, O.R.: Acta Physica Austr. 12, 331 (1959)

L e b e n s l a u f

Am 13. Juli 1939 wurde ich als Sohn des Apothekers Dr. Ullrich Neumcke und seiner Ehefrau Ilse geb. Wagner in Greiz/ Thüringen geboren. Im Januar 1953 folgten meine Mutter mit meinen Geschwistern und mir meinem Vater nach Bremen, der schon 1949 in die Bundesrepublik übergesiedelt war, um dort eine neue Existenz aufzubauen. 1957 zogen wir nach Hamburg um. Dort erwarb ich 1959 das Reifezeugnis und begann anschließend das Physikstudium in Göttingen. Nach dem Vordiplom im Mai 1962 wechselte ich an die Universität München über und fertigte am Institut für theoretische Physik eine Diplomarbeit an. Die Diplomprüfung habe ich im Juli 1965 bestanden.

Meine Lehrer waren: Hund, Bopp, Schlüter (theoretische Physik), Hilsch, Flammersfeld, Rollwagen (Experimentalphysik), Maack, Grauert (Mathematik).

